

Matemaattinen tilastotiede

12. harjoitukset, 49. vko 2007

12.1. Kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktio on

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-Q(x,y)/2}, \quad -\infty < x, y < \infty,$$

missä $Q(x, y) = \frac{1}{1-\rho^2}(x^2 - 2\rho xy + y^2)$. Laske $E(XY)$.

12.2. Tarkastellaan tehtävässä 1 määriteltyä kaksiulotteista normaalijakaumaa.

- (a) Lausu X :n ehdollisen jakauman tiheysfunktio $f(x|y) = f(x, y)/f_Y(y)$.
- (b) Osoita, että X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain jos $\rho = 0$.

12.3. Oletetaan, että satunnaisvektori (X, Y) noudattaa sellaista kaksiulotteista normaalijakaumaa, että $E(X) = E(Y) = 0$, $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$ ja $\text{Cor}(X, Y) = 0.6$.

- (a) Näytä laskemalla, että $\text{Cor}(X - Y, X + Y) = 0$. Siitä voidaan päätellä (miksi?), että $X - Y$ ja $X + Y$ ovat riippumattomat.
- (b) Laske $P(X - Y < 1, X + Y > 2)$.

12.4. Satunnaisvektori (X, Y) noudattaa sellaista kahden muuttujan normaalijakaumaa, että $E(X) = -3$, $E(Y) = 10$, $\text{Var}(X) = 25$, $\text{Var}(Y) = 9$ ja $\text{Cor}(X, Y) = 3/5$. Laske (ks. Lause 5.11)

- (a) $P(-5 \leq X \leq 5)$ ja $P(-5 \leq X \leq 5|Y = 13)$.
- (b) $P(7 \leq Y \leq 16)$ ja $P(7 \leq Y \leq 16|X = 2)$.
- (c) Ovatko X ja Y riippumattomat?

12.5. Tarkastellaan erään lintulajin yksilöiden painojakaumaa. Olkoon X uroksen paino ja Y naaraan paino grammoina. Oletetaan, että (X, Y) noudattaa $N(415, 347; 611, 689, -0.25)$, missä esim. $E(X) = 415$, $\text{Var}(X) = 347$ ja $\text{Cor}(X, Y) = -0.25$. Laske (ks. Lause 5.11)

- (a) $P(309.2 < Y < 380.6)$.
- (b) $P(309.2 < Y < 380.6|X = 385.1)$.

12.6. Satunnaisvektori (X, Y) noudattaa normaalijakaumaa, missä $E(X) = \mu_1$, $E(Y) = \mu_2$, $\text{Var}(X) = \sigma_1^2$, $\text{Var}(Y) = \sigma_2^2$ ja $\text{Cor}(X, Y) = \rho$. Määritellään $U = X + Y$, $V = X - Y$.

- (a) Määritä satunnaisvektorin (U, V) kovariansimatriisi.

(b) Mitä jakaumaa (U, V) noudattaa (ks. Esimerkki 5.25)?

12.7. Satunnaisvektori (X, Y) noudattaa normaalijakaumaa, missä $E(X) = E(Y) = 0$, $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$ ja $\text{Cov}(X, Y) = \rho$.

(a) Laske odotusarvo $E[(Y - aX - b)^2]$, missä a ja b ovat vakioita (Vihje: Lausu $[(Y - aX) - b]^2 = (Y - aX)^2 - 2b(Y - aX) + b^2$).

(b) Merkitään $q(a, b) = E[(Y - aX - b)^2]$. Näytä, että $q(a, b)$ saavuttaa miniminsä, kun $a = \rho$ ja $b = 0$.

12.8. Satunnaisvektori (X, Y) noudattaa normaalijakaumaa, missä $E(X) = \mu_1$, $E(Y) = \mu_2$, $\text{Var}(X) = \sigma_1^2$, $\text{Var}(Y) = \sigma_2^2$ ja $\text{Cor}(X, Y) = \rho$ (vrt. edellinen tehtävä). Millä a :n ja b :n arvoilla $E(Y - \hat{Y})^2$ saavuttaa miniminsä, kun $\hat{Y} = a + b(X - \mu_1)$? (Vihje: Standardoi X ja Y ja sovelleta edellisen tehtävän tulosta.)