TILTA1 Matemaattinen tilastotiede
11. harjoitukset, 48. viikko 2007
Vastauksia

11.1 Vastauksen perustana ovat Lause 5.4, Lause 5.6 ja Lause 5.1:n (4)-kohta.
X ~ N(0,4). Nyt X = 2Z, missä Z ~ N(0,1). *(Lause 5.4)*
Siis Y = $X^2 = (2Z)^2 = 4Z^2$, missä $Z^2 \sim \chi^2(1)$. *(Lause 5.6)*
Lisäksi $Z^2 \sim \chi^2(1)$ = Gamma(1/2,2).
Ja näin ollen Y = $4Z^2$ ~ Gamma(1/2,4·2). *(Lause 5.1)*
Siis Y ~ Gamma(1/2,8).

Huom. tehtävä on mahdollista ratkaista myös käyttämällä muunnosta. Kun sovelletaan tiheysfunktiotekniikkaa, X:n arvoavaruus on ositettava (vertaa alaluvussa 5.5.3 tehty ositus $S_X = (-\infty,0] \cup (0,\infty)$ ja tiheysfunktion muodostuminen). Tiheys- tai kertymäfunktiotekniikkaa hyödyntämällä tulee siis päätyä Gamma(1/2,8)-jakauman tiheysfunktioon, joka on muotoa $f(y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} y^{-1/2} e^{-y/8}$, kun $0 < y < \infty$ (huomaa, että $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).

11.2 $f_X(x) = \frac{x^2}{9}$, kun $0 < x < 3$. Ratkaistaan tehtävä tiheysfunktiotekniikalla:

Koska $0 < x < 3$, niin $0 < y < 27$. Nyt $x^3 = y$ eli $x = y^{1/3} = g(y)$, ja $g'(y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$. Siis

$$f_Y(y) = f_X(g(y))|g'(y)| = \frac{(y^{1/3})^2}{9} \left| \frac{1}{3} y^{-2/3} \right| = \frac{1}{27},$$ kun $0 < y < 27$ (ja $f_Y(y) = 0$, muulloin).

II tapa: kertymäfunktiotekniikka:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le y^{1/3}) = \int_0^{y^{1/3}} \frac{x^2}{9} dx = \Big/_0^{y^{1/3}} \frac{x^3}{27} = \frac{(y^{1/3})^3}{27} - 0 = \frac{y}{27},$$

kun 0 < y < 27. Näin ollen $F_Y'(y) = f_Y(y) = \frac{1}{27}$, kun $0 < y < 27$.

11.3 (a) Huomaa, että kertymäfunktion F(x) kuvaajassa on hyppäys kohdassa x=0, lisäksi kertymäfunktio F(x) ei ole derivoituva kohdassa x=1.
(b) P(–3 < X ≤ 1/2) = F(1/2) – F(–3) = 3/4 – 0 = 3/4. P(X = 0) = F(0) – F(0–) = 1/2 – 0 = 1/2.

11.4 Ratkaistaan tehtävä tiheysfunktiotekniikalla: Nyt $f_X(x) = 1$, kun $0 \le x \le 1$.

$$Y = -2\log X \Rightarrow -\frac{y}{2} = \log x \Leftrightarrow x = e^{-y/2} = g(y),$$ ja $g'(y) = -\frac{1}{2} e^{-y/2}$.

Siis $f_Y(y) = f_X(g(y))|g'(y)| = 1 \cdot \left| -\frac{1}{2} e^{-y/2} \right| = \frac{1}{2} e^{-y/2}$, kun $y \ge 0$.

(Tehtävä voidaan ratkaista myös kertymäfunktiotekniikalla, vrt. alaluku 5.5.1 ja ks. esim. 5.13)

11.5 Nyt $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(3) \cdot 2^3} x^{3-1} e^{-x/2} = \frac{1}{16} x^2 e^{-x/2}$, kun $0 < x < \infty$. Käytetään tiheysfunktiotekniikkaa.

Muunnos $Y = \sqrt{X} \Rightarrow x = y^2 = g(y)$ ja $g'(y) = 2y$. Nyt $S_Y = (0,\infty)$.

$$f_Y(y) = f_X(g(y))|g'(y)| = \frac{1}{16}(y^2)^2 e^{-y^2/2} \cdot 2y = \frac{1}{8} y^5 e^{-y^2/2}, \text{ kun } 0 < y < \infty .$$

(Tehtävä voidaan ratkaista myös kertymäfunktiotekniikalla, ks. alaluku 5.5.1)

11.6 Nyt $f_X(x) = \frac{1}{2}$, kun $-1 \le x \le 1$. Lisäksi $F_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2} dt = \Big/_{-1}^{x} \frac{1}{2} t = \frac{x+1}{2}$, kun $-1 \le x \le 1$.

Ratkaistaan tehtävä kertymäfunktiotekniikalla.

(a) r pariton. $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^r \le y) = P(X \le y^{1/r}) = F_X(y^{1/r}) = \frac{y^{1/r}+1}{2}$.

Derivoimalla saadaan $f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2r} y^{\frac{1}{r}-1}$, kun $-1 \le y \le 1, y \ne 0$. (muulloin $f_Y(y) = 0$)

(b) r parillinen. $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^r \le y) = P(0 \le X^r \le y) = P(-y^{1/r} \le X \le y^{1/r})$

$$= F_X(y^{1/r}) - F_X(-y^{1/r}) = \left(\frac{y^{1/r}+1}{2}\right) - \left(\frac{-y^{1/r}+1}{2}\right) = y^{\frac{1}{r}}.$$

Siis $f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{r} y^{\frac{1}{r}-1}$, kun $0 < y \le 1$. (muulloin $f_Y(y) = 0$)

(Tehtävä voidaan ratkaista myös tiheysfunktiotekniikalla: kohdassa (b) on käytettävä tällöin X:n arvoalueen ositusta: $S_X = [-1,0) \cup [0,1]$.)

11.7 Momenttifunktion perusteella $X \sim \chi^2_{(24)}$.

(a) E(X) = r = 24 ja Var(X) = 2r = 48.

(b) P(15.66 < X < 42.98) ≈ 0.89. Tämä saadaan R:llä seuraavasti:

```
pchisq(42.98,df=24)-pchisq(15.66,df=24)
[1] 0.889956
```

(c) Annettujen tietojen perusteella P(X < b) = 0.025 + 0.95 = 0.975, joten saadaan ratkaistua a ≈ 12.40 ja b ≈ 39.36. Nämä saadaan laskettua R:llä seuraavasti:

```
qchisq(0.025,df=24) # a
[1] 12.40115
qchisq(0.975,df=24) # b
[1] 39.36408
```

11.8 Ks. normaalijakauman momenttifunktio.

(a) Nyt $E(X) = 166$ ja $Var(X) = 400 = 20^2$. Siis $X \sim N(166,400)$

(b) $P(170 < X \le 200) = P\left(\frac{170-166}{\sqrt{400}} < Z \le \frac{200-166}{\sqrt{400}}\right) = P(0.2 < Z \le 1.7)$, kun $Z \sim N(0,1)$

$$= \Phi(1.7) - \Phi(0.2) = 0.9554 - 0.5793 = 0.3761.$$

$P(148 \le X \le 172) = P\left(\frac{148-166}{\sqrt{400}} \le Z \le \frac{172-166}{\sqrt{400}}\right) = P(-0.9 \le Z \le 0.3)$, kun $Z \sim N(0,1)$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.9) = \Phi(0.3) - [1 - \Phi(0.9)] = 0.6179 - 1 + 0.8159 = 0.4338.$$

Todennäköisyydet saadaan R:llä seuraavasti:

```
pnorm(200,166,20)-pnorm(170,166,20)
[1] 0.3761748
pnorm(172,166,20)-pnorm(148,166,20)
[1] 0.4338513
```