TILTA1 Matemaattinen tilastotiede
10. harjoitukset, 47. viikko 2007
Vastauksia

10.1 X ~ Tas(0,1). Siis E(X) = 1/2 ja Var(X) = 1/12. Määr. Y = cX + d, c ja d positiivisia vakioita.

(a) E(Y) = E(cX + d) = cE(X) + d = $\frac{1}{2}$c + d, ja Var(Y) = Var(cX + d) = $c^2 \cdot$Var(X) = $\frac{1}{12}c^2$.

(b) Nyt Y = [(c+d) – d]X + d ja X ~ Tas(0,1). (Vertaa luentomateriaalin alaluku 5.2.1).
Siis Y ~ Tas(d,c+d), jolloin tiheysfunktio on

$f(y) = \dfrac{1}{(c+d)-d} = \dfrac{1}{c}$, kun y ∈ [d, c+d], ja $f(y)$ = 0 muulloin.

Kertymäfunktio: $F(y) = \int_d^y \frac{1}{c}dt = \Big/_{d}^{y} \frac{1}{c}t = \frac{y-d}{c}$. Siis $F(y)$ = $\begin{cases} 0, & y < d \\ \dfrac{y-d}{c}, & d \le y \le c+d \\ 1, & y > c+d. \end{cases}$

10.2 (a) $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1+t}{2}dt = \Big/_{-1}^{x} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{(1+x)^2}{4}$, kun $-1 < x < 1$.

(Lisäksi $F(x) = 0$, kun $x \le 1$, ja $F(x) = 1$, kun $x \ge 1$)

(b) $E(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1+x}{2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 dx = \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3}.$

$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1+x}{2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 dx = \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 = \frac{1}{3}$, joten

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$

(c) P(0.2 ≤ X ≤ 0.6) = F(0.6) – F(0.2) = 7/25 = 0.28

10.3 (a) Oltava voimassa: $\int_1^\infty \frac{a}{x^3}dx = 1.$ Siis $\int_1^\infty \frac{a}{x^3}dx = \Big/_{1}^{\infty} \frac{-a}{2x^2} = \frac{a}{2}.$ Saadaan $\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 2.$

(b) $E(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}dx = \int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx = \Big/_{1}^{\infty} -\frac{2}{x} = 2.$

(c) $E(X^2) = \int_1^\infty x^2 \cdot \frac{2}{x^3}dx = \int_1^\infty \frac{2}{x}dx = \Big/_{1}^{\infty} 2\ln x = \infty$, ja koska $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, niin

varianssi ei ole äärellinen.

10.4 $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$, $-\infty < t < \infty$. Nyt $R(t) = \log_e(M(t)) = \ln(M(t)) = \ln(e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}) = \mu t + \sigma^2 t^2/2$.

(a) Tiedetään, että $E(X) = \mu$. Nyt $R'(t) = \mu + \sigma^2 t$, joten $R'(0) = \mu + \sigma^2 \cdot 0 = \mu$.
Siis $E(X) = R'(0)$.

(b) Tiedetään, että $Var(X) = \sigma^2$. Nyt $R''(t) = \sigma^2$, joten $R''(0) = \sigma^2$. Siis $Var(X) = R''(0)$.

10.5 (a) $F_n(x) = \int_0^x n \, dt = \Big/_{0}^{x} nt = nx$, kun $0 < x < \frac{1}{n}$.

Siis $F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 0 \\ nx, & \text{kun } 0 < x < 1/n \\ 1, & \text{kun } x \ge 1/n. \end{cases}$

(b) –

(c) $E(X_n) = \int_0^{1/n} xn \, dx = \Big/_{0}^{1/n} \frac{n}{2}x^2 = \frac{1}{2n}$ ja $E(X_n^2) = \int_0^{1/n} x^2 n \, dx = \Big/_{0}^{1/n} \frac{n}{3}x^3 = \frac{1}{3n^2}$.

Näin ollen $Var(X_n) = E(X_n^2) - [E(X_n)]^2 = \frac{1}{3n^2} - \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{12n^2}$.

10.6 (a) $f(x) = F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, kun $-\infty < x < \infty$.

(b) Osoitetaan, että *f(x)* = *f(–x)*.

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\frac{e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} = f(-x).$$

Siis *f(x)* on symmetrinen origon suhteen.

(c) P(–a ≤ x ≤ a) = F(a) – F(–a) = F(a) – [1 – F(a)] = 2F(a) – 1 symmetrian nojalla.

Nyt siis P(–a ≤ x ≤ a) = 1/2 ⇔ 2F(a) – 1 = 1/2. Tästä saadaan

F(a) = $\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-a}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3(1+e^{-a}) = 4 \Leftrightarrow 3e^{-a} = 1 \Leftrightarrow e^{-a} = \frac{1}{3}$.

Logaritmoidaan puolittain, jolloin saadaan $-a = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \ln 3 \approx 1.0986$.

10.7 (a) Koska X ~ Tas(0,1), niin $E(X)$ = 1/2. Nyt $F(x) = x$, kun $0 \le x \le 1$. Laskemalla saadaan

$$\int_0^1 (1-x)dx = \Big/_{0}^{1} x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} = E(X).$$

(b) Koska X ~ Exp(θ), niin $E(X)$ = θ. Nyt $F(x) = 1 - e^{-x/\theta}$, kun $x \ge 0$. Laskemalla saadaan

$$\int_0^\infty [1-(1-e^{-x/\theta})]dx = \int_0^\infty e^{-x/\theta}dx = \Big/_{0}^{\infty} -\theta e^{-x/\theta} = -\theta \cdot [0-1] = \theta = E(X).$$

10.8 Huomaa, että $f(x) = \begin{cases} ke^{x}, \text{ kun } x \le 0 \\ ke^{-x}, \text{ kun } x > 0. \end{cases}$

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-|x|}dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} ke^{x}dx + \int_{0}^{\infty} ke^{-x}dx = 1 \Leftrightarrow k\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx\right] = 1$

$$\Leftrightarrow k\left[\Big/_{-\infty}^{0} e^{x} + \Big/_{0}^{\infty} -e^{-x}\right] = 1 \Leftrightarrow k\big[(1-0)+(0-(-1))\big] = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Siis $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, kun $-\infty < x < \infty$, eli $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, \text{ kun } x \le 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x}, \text{ kun } x > 0. \end{cases}$

Kertymäfunktio:

Kun $x \le 0$, niin $F(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt = \Big/_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t} = \ldots = \frac{1}{2}e^{x}.$

Kun $x > 0$, niin $F(X) = F(0) + \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt = \frac{1}{2} + \Big/_{0}^{x} -\frac{1}{2}e^{-t} = \ldots = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$

(b) Käytetään momenttifunktiota.

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{tx}e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx}e^{-x}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{(t-1)x}dx\right] = \frac{1}{2}\left[\Big/_{-\infty}^{0} \frac{1}{t+1}e^{(t+1)x} + \Big/_{0}^{\infty} \frac{1}{t-1}e^{(t-1)x}\right] = \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(t+1)}(1-0) + \frac{1}{(t-1)}(0-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{(t-1)}\right] = \ldots = -\frac{1}{t^{2}-1} = \frac{1}{1-t^{2}},$$

kun $-1 < t < 1$. (ks. luentomateriaalin s. 155, jossa momenttifunktioon liittyvää asiaa).

Nyt $M'(t) = \dfrac{2t}{(1-t^{2})^{2}}$, jolloin $E(X) = M'(0) = 0.$ Ja vastaavasti saadaan

$M''(t) = \dfrac{2}{(1-t^{2})^{2}} + \dfrac{8t^{2}}{(1-t^{2})^{3}}$, jolloin $E(X^{2}) = M''(0) = 2.$

Huom. On myös mahdollista laskea b-kohdassa kysytyt odotusarvot $E(X)$ ja $E(X^2)$ integroimalla $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx = \ldots = 0$ ja vastaavasti $E(X^{2}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^{2} f(x)\ dx = \ldots = 2.$

Tulokset voidaan saada hyödyntämällä osittaisintegrointia (myös näissä tilanteissa on otettava huomioon, miten $f(x)$ on määritelty, kun $x \le 0$ ja $x > 0$).