

## Matemaattinen tilastotiede

10. harjoitukset, 47. vko 2005

10.1. Satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa tasajakaumaa  $\text{Tas}(0, 1)$  (ks. alaluku 5.2.1).

- (a) Laske satunnaismuuttujan  $Y = cX + d$  odotusarvo ja varianssi, kun  $c$  ja  $d$  ovat positiivisia vakioita.
- (b) Määritä  $Y$ :n kertymäfunktio ja tiheysfunktio.

10.2. Olkoon  $X$ :n tiheysfunktio

$$f(x) = (1 + x)/2, \text{ kun } -1 < x < 1.$$

Laske

- (a) Määritä  $X$ :n kertymäfunktio.
- (b) Laske  $X$ :n odotusarvo ja varianssi sekä
- (c) todennäköisyys, että  $X$ :n arvo on välillä  $[0.2, 0.6]$ .

10.3. Olkoon tiheysfunktio

$$g(x) = \frac{a}{x^3}, 1 < x < \infty.$$

- (a) Laske vakion  $a$  arvo siten, että  $g(x)$  on tiheysfunktio.
- (b) Laske  $E(X)$ .
- (c) Osoita, että  $\text{Var}(X)$  ei ole äärellinen.

10.4. Olkoon  $M(t)$  satunnaismuuttujan  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  momenttifunktio (ks. Lause 5.3 s. 169) ja  $R(t) = \log[M(t)]$  (luonnollinen logaritmi). Totea laskemalla, että

- (a)  $E(X) = R'(0)$  (1. derivaatta pisteessä  $t = 0$ ) ja
- (b)  $\text{Var}(X) = R''(0)$  (2. derivaatta pisteessä  $t = 0$ ).

10.5. Olkoon satunnaismuuttujan  $X_n$  tiheysfunktio  $f_n(x) = n, 0 < x < \frac{1}{n}$ .

- (a) Määritä  $X_n$ :n kertymäfunktio  $F_n(x)$ .
- (b) Piirrä  $X_n$ :n tiheysfunktio, kun  $n = 1, 5$  ja  $10$ .
- (c) Laske  $X_n$ :n odotusarvo ja varianssi.

10.6. Logistisen jakauman kertymäfunktio (ks. Esimerkki 5.1) on

$$F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}, -\infty < x < \infty.$$

- (a) Määritä logistisen jakauman tiheysfunktio  $f(x)$ .
- (b) Osoita, että tiheysfunktio on symmetrinen origon suhteen.
- (c) Määritä sellainen piste  $a$ , että  $P(-a \leq X \leq a) = 1/2$ .

10.7. Jos  $X$  on jatkuva ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, niin  $E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$ , missä  $F$  on  $X$ :n kertymäfunktio. Totea laskemalla, että tulos pätee, kun (a)  $X \sim \text{Tas}(0, 1)$ , (b)  $X \sim \text{Exp}(\theta)$  (ks. alaluku 5.2.2).

10.8. *Kaksipuolisen eksponenttijakauman* tiheysfunktio on

$$f(x) = ke^{-|x|}, \quad \text{kun } -\infty < x < \infty.$$

- (a) Määritä vakion  $k$  arvo ja jakauman kertymäfunktio.
- (b) Osoita, että  $E(X) = 0$  ja  $E(X^2) = 2$ .