Matemaattisen tilastotieteen perusteet
6. harjoitukset, 49. viikko 2011

6.1. Tarkastellaan Esimerkkejä 7.1. ja 7.4. Määritelmän mukaan X:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $Y = y$ on $f(x|y) = f(x,y)/f_Y(y)$, missä $f(x,y) = (x+2y)/12$, kuten Esimerkissä 7.1.

(a) Laske odotusarvo $E(Y|X=1) = \sum_{y=0}^{2} yf(y|1)$. (Ks. (7.1.11) ja (7.1.12) alaluvussa 7.1.2, Esimerkki 7.8).

(b) Laske $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

6.2. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on kaksiulotteinen Bernoullin jakauma (Alaluku 7.1.4). Olkoon Taulukossa 7.1 (s. 199) $p_{00} = 1/8$, $p_{01} = 1/4$, $p_{10} = 3/8$, $p_{11} = 2/8$.

(a) Ovatko X ja Y riippumattomat?

(b) Laske $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

6.3. Olkoon X ässien ja Y jätkien lukumäärä satunnaisesti valitussa pokerikädessä (5 satunnaisesti valittua korttia 52:n kortin normaalipakasta.)

(a) Määritä satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman todennäköisyysfunktio $f(x,y)$.

(b) Määritä X:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $Y = 2$.

6.4. Ammutaan pyöreään origo-keskiseen tauluun, jonka säde on 1 (yksikköympyrä). Osumapiste noudattaa tasajakaumaa yksikköympyrässä, eli todennäköisyys osua mihin tahansa origo-keskiseen x-säteiseen ympyrään on x^2, kun $x \le 1$. Olkoon X osuman etäisyys origosta. Määritä X:n kertymäfunktio ja tiheysfunktio.

6.5. Satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat tasajakaumaa (s. 187), jonka tiheysfunktio on

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

(a) Laske kertymäfunktion arvo $F_{X,Y}(0.6, 0.8)$.

(b) Laske todennäköisyys $P(0.25 \le X \le 0.75, 0.1 \le Y \le 0.75)$.

6.6. Oletetaan, että $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ ja $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$. Laske todennäköisyys $P(X + 2Y \le 3)$ standardimuotoisen normaalijakauman kertymäfunktio Φ avulla, kun

(a) X ja Y ovat riippumattomat;

(b) $\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{1}{2}$.

6.7. Esimerkissä 7.7 (s. 192-193) johdetaan Y:n ehdollinen odotusarvo

$$E(Y \mid x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{0.0.1}$$

joka on x:n lineaarinen funktio. Jos $E(Y \mid x)$ on lineaarinen, niin pitää yleisesti paikkansa, että ehdollinen odotusarvo on muotoa

$$E(Y \mid x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), \tag{0.0.2}$$

missä $\rho = \mathrm{Cor}(X, Y)$ on X:n ja Y:n välinen korrelaatio, σ_X on X:n hajonta ja σ_Y on Y:n hajonta. Tarkista laskemalla, että (0.0.1) on muotoa (0.0.2)(Huomaa, että μ_X, μ_Y ja $E(Y^2)$ on laskettu Esimerkissä 7.6. Lisäksi $E(XY) = 1/4$.).

6.8. Oletetaan, että satunnaisvektori (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa, missä $\mu_X = 3.2, \mu_Y = 2.4, \sigma_X = 0.4, \sigma_Y = 0.6$ ja korrelaatio $\rho = 0.6$.

(a) Kirjoita $E(Y|X = x)$:n lauseke (ks. lause 7.9, s. 215).

(b) Laske $P(Y < 1.8)$.

(c) Laske $P(Y < 1.8|X = 2.5)$.