

## Matemaattisen tilastotieteen perusteet

### 4. harjoitukset, 47. viikko 2011

- 4.1. Eräessä kunnassa 3%:lla verovelvollisista tulot ovat yli 100000 euroa. Mikä on todennäköisyys, että 60 satunnaisesti valitun verovelvollisen joukossa korkeintaan kolmella tulot ovat yli 100000 euroa? Laske todennäköisyys Poissonin jakauman avulla. Vertaa todennäköisyyttä tehtävässä 3.5. binomijakauman ja hypergeometrisen jakauman avulla saattuihin tuloksiin.
- 4.2. Oletetaan, että vakavien ( $X$ ) ja lievien ( $Y$ ) onnettomuuksien lukumäärät ovat toisistaan riippumattomat,  $X \sim \text{Poi}(1)$  ja  $Y \sim \text{Poi}(3)$  (Esimerkki 5.8 ja Lause 5.11). Havaitaan, että  $X + Y = 10$ . Laske
- (a)  $E(X \mid X + Y = 10)$  ja
  - (b)  $P(Y > 5 \mid X + Y = 10)$ .
- 4.3. Eräessä kaupungissa esiintyy tulipaloja Poissonin prosessin mukaisesti tiheydellä 5 per kuukausi. Mikä on todennäköisyys, että seuraavana vuonna on täsmälleen 2 kuukautta (mitkä tahansa kaksi), jolloin ei ole tulipaloja?
- 4.4. Eksponenttijakauman kertymäfunktio on  $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$ ,  $x \geq 0$  ja  $F(x) = 0$ , kun  $x < 0$ . Jakauman momenttifunktio  $M(t) = \frac{1}{1-\theta t}$ . (a) Määritä  $E(X)$  laskemalla  $M'(0)$ . (b) Määritä  $\theta$ :n arvo siten, että jakauman mediaani on 3. (Ks. mediaanista teksti ennen Esimerkkiä 6.4).
- 4.5. Satunnaismuuttujan  $X$  tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{3}{88}x(x+1) \quad \text{välillä } (0, 4).$$

- (a) Tarkista, että  $f(x)$  on todella tiheysfunktio.
  - (b) Määritä  $X$ :n kertymäfunktio.
  - (c) Laske  $P(2 \leq X \leq 3)$ .
- 4.6. Satunnaismuuttujan  $X$  tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1/2, & 2 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Määritä  $X$ :n kertymäfunktio ja piirrä sen kuvaaja funktio (vrt. Esimerkki 6.5).

4.7. Määritä vakio  $c$  siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} c g(x), & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{muualla} \end{cases}$$

on tiheysfunktio, kun  $g(x) = x^2 - x + 1$ . Laske  $P(0.5 \leq X \leq 1)$ .

4.8. Oletetaan, että jatkuva satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa tasajalaumaa  $\text{Tas}(0, 1)$ . Laske (a)  $E(e^X)$  ja (b)  $P(e^X \leq \frac{4}{3})$ . (Ks. alaluku 6.2.1)