Matemaattisen tilastotieteen perusteet Harj. 3 vk 46 2011

(3.1) 5 voittavaa ja 95 tyhjää arpaa

$X_i = 1$, jos i. valinnassa saadaan voittava arpa

$X_i = 0$, muulloin

$$P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{5}{5+95-1} = \frac{5}{99}$$

$$P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{5-1}{5+95-1} = \frac{4}{99}$$

joten

$P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) > P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$

ja X_1 ja X_2 eivät siis riippumattomat.

(3.2.) Voittavien arpojen lkm $S_{10} = X_1 + \ldots + X_{10}$ noudattaa hypergeometrista jakaumaa

Laskettava $P(W_3 = 8)$ eli todennäköisyys, että 3. voittava arpa saadaan 8. valinnalla. (5.3.10) s.126

$W_3 \sim NHGeo(3, 100, \frac{5}{100})$ (Negatiivinen hypergeometrinen jakauma)

$$P(W_3 = 8) = \frac{3}{8} P(S_8 = 3) \quad (5.3.11) \quad S_8 \sim HGeo(8, 100, \tfrac{5}{100})$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \text{dhyper}(3, 5, 95, 8) = 0.00117$$

voittavien lkm otoksessa, voittavien lkm katussa, tyhjien lkm, otoskoko

Hc. R:llä ?dhyper

(3.3.) Olk.

Kruunien lkm X 3 lantin heitossa, $X \sim Bin(3, \frac{1}{2})$ $f(x) = \binom{3}{x}(\frac{1}{2})^x(1-\frac{1}{2})^{3-x}$

Voittaja saadaan selville, kun $X = 1$ tai $X = 2$

$$P(X = 1 \text{ tai } X = 2) = \binom{3}{1}(\tfrac{1}{2})^1(\tfrac{1}{2})^2 + \binom{3}{2}(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^{3-2} = 3\cdot(\tfrac{1}{2})^3 + 3\cdot(\tfrac{1}{2})^3$$

$$= 2\cdot 3\cdot(\tfrac{1}{2})^3 = 3\cdot(\tfrac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

W_1 on ratkaisuun vaadittavien heittokierrosten lkm.

$W_1 \sim Geo(\frac{3}{4})$ ja

P("Voittaja saadaan selville vähemmällä kuin 5:llä heittokierroksella")

$$= P(W_1 < 5) = 1 - P(W_1 \geq 5) = 1 - P(W_1 > 4)$$

$$= 1 - (1 - \tfrac{3}{4})^4 = 1 - (\tfrac{1}{4})^4 = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256} = \underline{\underline{0,996}}$$

Hc. Esimerkki 5.6 s. 129

$[P(W > k) = q^k]$

(3.4.) Kolmosen todennäköisyys on $\frac{1}{10}$

Viiden kolmosen saamiseen tarvittavien yritysten lkm

$X \sim NBin(5, \frac{1}{10})$

Keskimäärin tarvitaan $E(X) = \frac{5}{1/10} = 50$ yritystä, että saadaan viisi kolmosta.

Numeroita ennen viidettä kolmosta on $X-1$ ja keskimäärin $E(X-1) = E(X) - 1 = 49$.

$\boxed{\text{Ks. Luku } 5.3.2}$

(3.5.) Olk. X yli 100 000 ansaitsevien lkm otoksessa.

Likimain $X \sim Bin(60, 0.03)$

"korkeintaan 3"

pbinom(3, 60, 0.03) = 0.8943 $\quad P(X \leq 3)$ s.129

Kun verovelvollicia on 10 000, tarkkaan ottaen

$X \sim HGeo(60, 10\,000, 0.03)$

$$\text{phyper}(\underset{x=3}{3}, \underset{0.03 \cdot 10000}{300}, \underset{10000-300}{9700}, \underset{\text{otoskoko}}{60}) = 0.8948$$

(3.6.) Olk. $X_i = \begin{cases} 1, & \text{kun A voittaa} \\ 0, & \text{kun A häviää} \end{cases}$ $\quad \boxed{\text{Luku } 5.3.2}$

ja

W_4 pienin sellainen k:n arvo, että

$X_1 + \ldots + X_k = 4$

$W_4 \sim NBin(4, 0.6)$, $\quad W_4 = 4, 5, 6, 7$

$$P(W_4 = k) = \binom{k-1}{4-1} 0.6^4 \, 0.4^{k-4}$$

A voittaa tr:llä $\sum_{k=4}^{7} P(W_4 = k)$ $\quad = 0.1296 + 0.20736 + 0.20736 + 0.165888$

$= 0.710208$

R:llä $\quad$ SM on R:ssä epäonnistumisten lkm ennen tavoiteltavaa onnistumisten lukumäärää.

i = 0:3

sum(dnbinom(i, 4, 0.6)) = 0.71

(3.7.) Olk. X niiden päivien lkm, jolloin saat sakon

$X \sim Bin(5, 0.1)$

Säästät parkkimatkuissa $5 \cdot 5$ € eli 25 €

Jäät voitolle, jos $25X < 25 \iff X < 1 \iff X = 0$

$$P(X=0) = \binom{5}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{5-0} = 0.9^5 = 0.59049$$

(3.8.) Punainen sattuu tn:llä $18/37$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{kun punainen sattuu } i. \text{ kierroksella} \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

W on pienin sellainen n:n arvo, että $X_1 + \dots + X_n = 1$ (Geometrinen jak.)

$f(x) = p(1-p)^{x-1}, \; x = 1, 2, \dots$

a) $$E(2^{W-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} (1-p)^{k-1} p$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} [2(1-p)]^{k-1} = \infty,$$

koska $2(1-p) > 1 \iff p < \frac{1}{2}$

b) $$P(1 \le W \le s+1) = \sum_{k=1}^{s+1} (1-p)^{k-1} p$$ merk. $v = k-1$

$$= p \sum_{v=0}^{s} (1-p)^v = p \cdot \frac{1-(1-p)^{s+1}}{1-(1-p)} = p \frac{1-(1-p)^{s+1}}{p} = \underline{\underline{1-(1-p)^{s+1}}}$$