Matemaattisen tilastotieteen perusteet
3. harjoitukset, 46. viikko 2011

3.1. Hatussa on 5 voittavaa ja 95 tyhjää arpaa ($a = 5, b = 95$, ks. alaluku 5.3.3. ja Esimerkki 4.5). Valitaan peräkkäin palauttamatta yksitellen 10 arpaa hatusta. Olkoon $X_i = 1$, jos i. valinnasssa saadaan voittava arpa, muutoin $X_i = 0$. Valintaprosessi on satunnaismuuttujien jono $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$. Laske $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$ ja $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$. Totea, että $P(X_2 = 1|X_1 = 0) > P(X_2 = 1|X_1 = 1)$ (X_1 ja X_2 eivät ole riippumattomat).

3.2. (Jatkoa edelliseen). Voittavien arpojen lukumäärä $S_{10} = X_1 + \cdots + X_{10}$ otoksessa noudattaa hypegeometrista jakaumaa (ks. kaava (5.3.9)). Laske todennäköisyys, että kolmas voittava arpa saadaa kahdeksannella valinnalla eli $X_8 = 1$ on kolmas ykkönen (Ks. kaava (5.3.10) ja pari muuta kaavaa siitä eteenpäin).

3.3. Kolmen hengen poruhka on voittanut veikkauksessa ja he ovat sopineet, että voitto annetaan yhdelle. Kukin heittää harhatonta lanttia ja voiton saa se, jonka tulos poikkeaa muiden tuloksesta. Jos saadaan esimerkiksi `RRL`, niin tuloksen `L` saanut voittaa. Jos taas saadaan esimerkiksi `RRR`, heitetään uudestaan lanttia. Määritä todennäköisyys, että voittaja saadaan selville vähemmällä kuin 5:llä heittokierroksella. (Vihje. Laske ensin todennäköisyys, että voittaja saadaa selville kolmen lantin heitossa. Sovella sitten tarvittavien heittokierrosten määrään geometrista jakaumaa.)

3.4. Valitaan satunnaisesti numeroita joukosta $\{0, 1, \ldots, 9\}$ yksitellen ja palauttaen, jolloin yksittäiset valinnat ovat toisistaan riippumattomia. Muodostuva luku $0.x_1x_2x_3\ldots$ on satunnaisluku väliltä $(0, 1)$, missä x_1 on ensimmäisenä valittu numero, x_2 toisena valittu, jne. Kuinka monta numeroa satunnaisluvussa on keskimäärin ennen viidettä kolmosta?

3.5. Eräässä kunnassa 3%:lla verovelvollisista tulot ovat yli 100000 euroa. Mikä on todennäköisyys, että 60 satunnaisesti valitun verovelvollisen joukossa korkeintaan kolmella tulot ovat yli 100000 euroa? Laske todennäköisyys binomijakauman avulla. Mitä on kysytty tarkka todennäköisyys, jos verovelmollisten lukumäärä kunnassa on 10000.

3.6. Joukkueet A ja B pelaavat paras seitsemästä pelisarjan sarjan. Joukkue, joka voittaa ensin 4 peliä on mestari. Oletetaan, että A voittaa B:n todennäköisyydellä 0.6 ja yksittäiset pelit ovat riippumattomia. Mikä on todennäköisyys, että A voittaa mestaruuden?

3.7. Parkkeeraat autosi viitenä peräkkäisenä päivänä parkkiruutuun maksamatta prkkimaksua ja säästät näin 5 euroa/per päivä. Jos kärähdät,

R funktio	Jakauma	Parametrit	tnf, kf
binom	binomi	n, p	dbinom, pbinom
pois	Poissonin	λ	dpois, ppois
hyper	hypergeometrinen	a, b, n	dhyper, phyper
nbinom	negatiivinen binomi	r, p	dnbinom, pnbinom
geom	geometrinen	p	dgeom, pgeom

Taulukko 1. Jakaumien R funktioita

saat sakkoa 25 euroa. Oletetaan, että todennäköisyys kärähtää on 0.1. Millä todennäköisyydellä jäät voitolle tässä ”pelissä”?

3.8. Pelaat ruletissa ”punaista”. Punainen sattuu todennäköisyydellä $p = 18/37$. Olkoon $X_i = 1$, kun punainen sattuu i. kierroksella, muuten $X_i = 0$. Olkoon W pienin sellainen n:n arvo, että $X_1 + \cdots + X_n = 1$ (geometrinen jakauma). Pelaat niin kauan, kunnes $W = 1$. Pistät k. kierroksella panoksen 2^{k-1}, jonka saat, jos sattuu punainen ja muuten menetät tuon summan. (a) Laske panostamasi summan odotusarvo $E(2^{W-1})$. Oletetaan, että panoksen yläraja on 2^S (Pystyt voittamatta pelaamaan korkeintaan $S + 1$ kierrosta). (b) Millä todennäköisyydellä $1 \leq W \leq S + 1$?