Matemaattisen tilastotieteen perusteet
2. harjoitukset, 45. viikko 2011

2.1. Heitetään lanttia n kertaa. Oletetaan, että kruunan todennäköisyys on p ja klaavan $1-p=q$. Olkoon A_i tapahtuma, että i. ja $(i+1)$. heitto on kruuna. Tapahtuma A_i on kahden kruunan toistos, joka alkaa i. heitolla. Jos esimerkiksi $n=5$, niin sarjassa $RLRRR$ sattuvat tapahtumat A_3 ja A_4. Olkoon satunnaismuuttuja X toistosten lukumäärä n:n pituisessa sarjassa. Laske odotusarvo $E(X)$. (Vihje: Määrittele indikaattorimuuttujat $I_{A_i}, i=1,\ldots,n-1$ ja määrittele niiden avulla X.)

2.2. Olkoon satunnaismuuttujan X arvojoukko $S_X=\{0,1,2,\ldots\}$. Näytä, että odotusarvo voidaan silloin kirjoittaa muodossa

$$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X>n).$$

(Vihje: Merkitse $p_n=P(X=n)$ ja huomaa, että

$$E(X)=(p_1+p_2+p_3+p_4+\cdots)+(p_2+p_3+p_4+\cdots)+(p_3+p_4+\cdots)+\cdots$$

2.3. Toistokokeessa ”onnistumisen”todennäköisyys on p (Esim. lantin heitto, heitot riippumattomia). Olkoon X ensimmäiseen onnistumiseen tarvittavien kokeiden lukumäärä. Jos esim. lantin heitossa R on ”onnistuminen”, niin sarjassa $KKKR$ saadaan $X=4$. Satunnasimuuttuja X noudattaa geometrista jakaumaa ja $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\ldots$.

(a) Laske $P(X>n)$.

(b) Laske edellisen tehtävän tuloksen avulla $E(X)$.

2.4. Oletetaan, että pariskunta päättää hankkia lapsia niin kauan, kunnes heillä on kumpaakin sukupuolta oleva lapsi. Mikä on lapsien lukumäärän odotusarvo. Olkoon X sen synnytyksen järjestysnumero, jonka jälkeen pariskunnalla on ensimmäisen kerran kumpaakin sukupuolta oleva lapsi. Oletetaan, että pojan todennäköisyys on p ja synnytykset ovat toisistaan riippumattomat. Mikä on odotusarvo, jos $p=1/2$. (Vihje: Laske ensin $P(X>n)$ ja sovella 2. thetävän tulosta.)

2.5. Heitetään kahta normaalinoppaa siten, että heittojen tulokset ovat toisistaan riippumattomat. Silloin otosavaruus on $\Omega=\{11,12,\ldots,16,\ldots,56,66\}$, missä on 36 yhtä todennäköistä alkeistapausta. Olkoon satunnaismuuttuja X ykkösten lukumäärä kahden nopan heitossa ja Y kuutosten lukumäärä. Laske X:n ja Y:n välinen kovarianssi ja korrelaatio.

2.6. Satunnasimuuttujan X momenttifunktio (Alaluku 4.6.2) on

$$M(t) = e^t \frac{2}{5} + e^{2t} \frac{1}{5} + e^{3t} \frac{2}{5}.$$

Määritä $E(X), \mathrm{Var}(X)$ ja X:n todennäköisyysfunktio.

2.7. Oletetaan, että satunnasimuuttujan X arvojoukko on $S_X = \{-1, 0, 1\}$. Haluat määrittää X:n jakauman niin, että $E(X) = 0$ ja $\mathrm{Var}(X)$ on mahdollisimman suuri. Mikä on X:n todennäköisyysfunktio?

2.8. Heitetään lanttia 10 kertaa (heitot riippumattomia). Olkoon $X_i = 1$, jos kruuna ja muutoin $X_i = 0, i = 1, \ldots, 10$. Voitat yhden ($= 1$) euron jokaisella heitolla, jossa kruuna ja häviät yhden ($= -1$) euron jokaisella heitolla, jossa klaava. Olkoon satunnaismuuttuja Y voitto/tappio koko heittosarjassa. Esitä Y satunnaismuuttujien $X_1, \ldots, X_{10}$ avulla. Laske $E(Y)$ ja $\mathrm{Var}(Y)$, kun $P(X_i = 1) = 1/2$.