

Matemaattisen tilastotieteen perusteet

1. harjoitukset, 44. viikko 2011

1.1. Oletetaan, että $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$ ja $E(X) = 3 \text{Var}(X)$. Laske $P(X = 0)$.

1.2. Olkoon satunnaismuuttujan X todennäköisyysfunktio

$$f(x) = \frac{(|x| + 1)^2}{9}, \quad x = -1, 0, 1.$$

Laske $E(X)$, $E(X^2)$ ja $E(3X^2 - 2X + 4)$.

1.3. Olkoon $h(x) = (x - b)^2$, missä b ei ole X :n funktio. Millä b :n arvolla odotusarvo $E[(X - b)^2]$ saavuttaa miniminsä, kun oletetaan, että odotusarvo on olemassa. (Vihje: Tarkastele funktiota $g(b) = E[(X - b)^2] = E(X^2) - 2bE(X) + b^2$.)

1.4. Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ja $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$. Määritellään satunnaismuuttujat X , Y ja Z seuraavasti:

$$\begin{array}{lll} X(\omega_1) = 1, & X(\omega_2) = 2, & X(\omega_3) = 3, \\ Y(\omega_1) = 2, & Y(\omega_2) = 3, & Y(\omega_3) = 1, \\ Z(\omega_1) = 3, & Z(\omega_2) = 1, & Z(\omega_3) = 2. \end{array}$$

(a) Osoita, että satunnaismuuttujilla X , Y ja Z on sama todennäköisyysjakauma.

(b) Määritä satunnaismuuttujien $X + Y$, $Y + Z$ ja $\sqrt{(X^2 + Y^2)Z}$ todennäköisyysfunktio.

1.5. Satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat binomijakaumaa $\text{Bin}(1, 0.75)$, $0 < p < 1$ (eli Bernoullin jakauma $\text{Ber}(0.75)$). Laske $E(XY)$, kun (a) ei oleteta X :n ja Y :n riippumattomuutta ja kun (b) oletetaan riippumattomuus.

1.6. Informaatiolähde lähettää 6-numeroisen viestin binäärikoodina (numeroita 0 ja 1) viestintäkanavaan. Jokainen numero valitaan satunnaisesti toisistaan riippumatta ja numeron 1 todennäköisyys on 0.3. Laske todennäköisyydet, että (a) viestissä on 3 ykköstä (b) vähemmän kuin 2 nollaa.

1.7. Olkoon Z sellainen satunnaismuuttuja, joka noudattaa samaa jakaumaa kuin $-Z$. Tiedetään, että $P(Z = 1) = 0.15$, $P(Z = 2) = 0.1$ ja $P(Z = 5) = 0.25$. Määritä Z :n jakauma.

1.8. Laske todennäköisyys $P(1 \leq X \leq 2)$, kun X :n momenttifunktio on

$$M(t) = \sum_{x=1}^{10} \frac{1}{10} e^{tx}.$$