

Matemaattinen tilastotiede

Erkki Liski

Matematiikan, Tilastotieteen ja Filosofian Laitos
Tampereen Yliopisto

Alkusanat

Tämä moniste perustuu vuosina 2002-2004 pitämiini matemaattisen tilastotieteen luentoihin Tampereen yliopistossa. Aineopintotasoinen matemaattisen tilastotieteen opintojakso voidaan suorittaa heti 2. opiskeluvuoden syksyllä tilastotieteen ja analyysin perusopintojen jälkeen. Moniste on tarkoitettu luentoihin liittyväksi oheismateriaaliksi ja on siis viimeistelemätön kehitysversio. Opetuksessa on kuitenkin hyödyllistä, että voidaan viitata tiettyyn perusmateriaaliin.

Lukuihin on liitetty jonkin verran harjoituksia, mutta kurssin aikana niitä tulee jatkuvasti lisää. Asioiden omaksuminen onnistuu parhaiten tekemällä harjoituksia ja ne antavat myös viitteen siitä, millaisia asioita edellytetään hallittavan kurssin väli- ja loppukokeissa.

Jarmo Niemelää kiitän erittäin asiantuntevasta avusta monisteen teknisessä toteuttamisessa \LaTeX illa.

Tampereella 9. syyskuuta 2005

Erkki Liski

Sisältö

Alkusanat	iv
1 Johdanto	1
1.1 Todennäköisyys ja tilastotiede	1
1.2 Havaitut frekvenssit ja empiiriset jakaumat	1
1.3 Todennäköisyysmallit	3
1.3.1 Satunnaiskoe	3
1.3.2 Joukko-operaatiot	4
1.3.3 Todennäköisyys	7
1.3.4 Äärettömät otosavaruudet	8
1.3.5 Todennäköisyyden tulkinnat	9
1.4 Ehdollinen todennäköisyys	10
1.4.1 Ehdollisen todennäköisyyden frekvenssitulkinta	11
1.4.2 Kertolaskusääntö	12
1.4.3 Riippumattomuus	12
1.5 Odotetut frekvenssit	12
Yhteenveto	12
Harjoituksia	14
2 Todennäköisyyslaskenta ja kombinatoriikka	19
2.1 Todennäköisyyden ominaisuuksia	19
2.2 Symmetriaan perustuva todennäköisyys	22
2.3 Aksiomaattinen lähestymistapa	23
2.4 Kombinatoriikkaa	23
2.4.1 Summa- ja tuloperiaate	23
2.4.2 Valinta järjestyksessä	23
2.4.3 Osajoukon valinta	24
2.4.4 Otanta palauttaen, kun järjestystä ei oteta huomioon	26
2.4.5 Kombinatoriikan merkintöjä ja identiteettejä	27
2.4.6 Binomilause, hypergeometrinen identiteetti ja multinomilause	28
2.4.7 Gammafunktio	29
2.5 Satunnaismuuttuja	30
2.5.1 Satunnaismuuttujan jakauma	32
2.5.2 Kertymäfunktio	33

2.5.3	Diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysfunktio	36
2.5.4	Diskreetti tasajakauma	37
2.6	Otanta palauttamatta	38
2.6.1	Hypergeometrinen jakauma	39
2.6.2	Tarkistusotanta teollisuudessa	40
2.7	Otanta palauttaen	40
2.8	Binomijakauma	42
2.8.1	Binomijakauma hypergeometrisen jakauman likiarvona	43
2.9	Todennäköisyyden yleiset aksioomat	44
	Yhteenveto	45
	Harjoituksia	47
3	Satunnaismuuttajat, ehdollistaminen ja riippumattomuus	51
3.1	Ehdollinen todennäköisyys	51
3.1.1	Todennäköisyyksien tulosääntö	52
3.1.2	Riippumattomuus	54
3.1.3	Joukko-oppi ja todennäköisyys	58
3.2	Ehdolliset jakaumat	58
3.3	Satunnaismuuttajien ominaisuuksia	59
3.3.1	Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo	59
3.3.2	Ehdollisen jakauman odotusarvo	65
3.3.3	Satunnaismuuttujan varianssi	67
3.3.4	Kovarianssi ja korrelaatio	69
3.3.5	Satunnaismuuttujan funktion jakauma	70
3.3.6	Identtisesti jakautuneet satunnaismuuttajat	71
3.3.7	Satunnaismuuttajien riippumattomuus	72
3.3.8	Useiden satunnaismuuttajien riippumattomuus	73
3.4	Suurten lukujen laki	74
3.5	Generoivat funktiot ja momentit	77
3.5.1	Momentit	77
3.5.2	Momenttifunktio	77
3.5.3	Todennäköisyydet generoiva funktio (tgf)	80
3.6	Kokeiden yhdistäminen ja tulomallit	81
3.6.1	Yleinen tulokaava	83
3.7	Bayesin lause	85
3.7.1	Peräkkäisotanta	88
3.8	Usean tapahtuman unionin todennäköisyys	90
	Yhteenveto	92
	Harjoituksia	95
4	Diskreetit jakaumat	99
4.1	Diskreetti satunnaismuuttaja	99
4.2	Bernoullin kokeet ja binomijakauma	101
4.3	Odotusaikojen jakaumat	106
4.3.1	Odotusajat Bernoullin kokeissa	107

4.3.2	Geometrinen jakauma ja negatiivinen binomijakauma	109
4.3.3	Odotusajat peräkkäisotannassa	112
4.3.4	Hypergeometrinen jakauma ja negatiivinen hypergeometrinen jakauma	114
4.3.5	Tasajakauma	116
4.4	Poissonin jakauma	116
4.5	Poissonin prosessi	122
4.5.1	Laskuriprosessi	122
4.5.2	Poissonin prosessin määrittely	123
4.5.3	Satunnaistapahtumat tila-avaruudessa	125
4.6	Kaksiulotteiset jakaumat	126
4.6.1	Reunajakauma ja ehdollinen jakauma	128
4.6.2	Satunnaismuuttujien funktion jakauma	131
4.6.3	Ehdollinen odotusarvo	131
4.6.4	Symmetrinen jakauma	133
4.6.5	Kaksiulotteinen Bernoullin jakauma	134
4.7	Satunnaismuuttujien funktion odotusarvo	136
4.7.1	Momentit	136
4.7.2	Satunnaisvektorin momenttifunktio	137
4.8	Riippumattomat satunnaismuuttujat	138
4.8.1	Riippumattomat kokeet	138
4.8.2	Samoin jakautuneet riippumattomat (SJR) satunnaismuuttujat	139
4.8.3	Riippumattomien satunnaismuuttujien funktio	139
4.9	Multinomijakauma ja moniulotteinen hypergeometrinen jakauma	140
	Yhteenveto	142
	Harjoituksia	144
5	Jatkuvat jakaumat	151
5.1	Jatkuvat satunnaismuuttujat	151
5.2	Tasajakauma ja eksponenttijakauma	160
5.2.1	Tasajakauma	160
5.2.2	Eksponenttijakauma	161
5.2.3	Elinaikajakauma	163
5.3	Gammajakauma ja χ^2 -jakauma	164
5.4	Normaalijakauma	167
5.4.1	Standardimuotoinen normaalijakauma	167
5.4.2	Yleinen normaalijakauma	169
5.5	Muuttujien vaihto	172
5.5.1	Muunnos kertymäfunktio avulla	172
5.5.2	Muunnos tiheysfunktion avulla	173
5.5.3	Normaalimuuttujan muunnokset	176
5.6	Satunnaismuuttujan odotusarvo	177
5.6.1	Momenttifunktio ja momentit	179

5.7	Kaksiulotteiset jakaumat	180
5.7.1	Reunajakauma ja ehdollinen jakauma	181
5.7.2	Yhteisjakauman momenttifunktio	186
5.8	Kahden muuttujan normaalijakauma	188
5.8.1	Standardimuoto	188
5.8.2	Korreloivat muuttujat	188
5.9	Satunnaisvektoreiden muunnokset	189
5.9.1	Yleinen kahden muuttujan normaalijakauma	193
5.9.2	Studentin t -jakauma, F -jakauma ja beta-jakauma . . .	195
5.9.3	Hierarkkiset mallit ja yhdistetyt jakaumat	199
	Yhteenveto	202
	Harjoituksia	206
6	Otantajakaumien teoria	213
6.1	Riippumattomat satunnaismuuttujat	213
6.2	Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma . . .	214
6.3	Normaalijakaumaan liittyvät jakaumat	218
6.4	Järjestyssuureet	221
6.4.1	Maksimi ja minimi	221
6.4.2	Järjestyssuureen $X_{(k)}$ jakauma	222
6.5	Keskeinen rajaväittäjä	223
6.6	Jakaumien likiarvot normaalijakauman avulla	225
6.7	t -jakauma ja F -jakauma	226
6.8	Momenttifunktion rajafunktiot	227
6.9	Suppenemiskäsitteet	227
6.10	Estimaattorit	230
6.10.1	Estimaattoreiden ominaisuuksia	230
6.10.2	Delta-menetelmä	231