3.5 Generoivat funktiot ja momentit

3.5.1 Momentit

Eräs tapa luonnehtia satunnaismuuttujan jakaumaa, on laskea jakauman momentit. Ne määritellään odotusarvon avulla.

Määritelmä 3.10 Olkoon r positiivinen kokonaisluku. Jos odotusarvo

$$\alpha_r = E(X^r)$$

on olemassa, se on satunnaismuuttujan X (tai X:n jakauman) r. momentti. Vastaavasti X:n r. keskusmomentti on

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r],$$

missä $\mu = E(X) = \alpha_1$.

Momenttia α_r kutsutaan joskus myös *origomomentiksi.* Jakauman keskiarvo on siis 1. origomomentti ja varianssi 2. keskusmomentti. Satunnaismuuttujan X *tekijämomentit* g_r, $r = 1, 2, \ldots$ määritellään seuraavasti:

$$g_r = E[X^{(r)}] = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)].$$

Ensimmäiset kaksi tekijämomenttia ovat

$$\begin{aligned} g_1 &= E(X) = \alpha_1 = \mu, \\ g_2 &= E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = \alpha_2 - \alpha_1. \end{aligned}$$

Koska $\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2$, niin

$$\sigma^2 = g_2 + \mu - \mu^2.$$

Keskus- ja origomomenttien välinen yhteys

$$\begin{aligned} \mu_r = E[(X-\mu)^r] &= E[\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} X^{r-i}(-\mu)^i] \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} E[X^{r-i}](-\mu)^i = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \alpha_{r-i}\mu^i \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \alpha_r &= E[(X-\mu+\mu)^r] \\ &= E[\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (X-\mu)^{r-i}\mu^i] = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \mu_{r-i}\mu^i. \end{aligned}$$

Näistä identiteeteistä seuraavat esimerkiksi tulokset

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \mu_2 + \mu^2, & \mu_2 &= \alpha_2 - \mu^2, \\ \alpha_3 &= \mu_3 + 3\mu_2\mu + \mu^3, & \mu_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_2\mu + 2\mu^3, \\ \alpha_4 &= \mu_4 + 4\mu_3\mu + 6\mu_2\mu^2 + \mu^4, & \mu_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_3\mu + 6\alpha_2\mu^2 - 3\mu^4, \end{aligned}$$

missä $\alpha_1 = \mu$ ja $\mu_1 = 0$.
Esimerkki Jos $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, niin

$$\mu = p \text{ ja } \alpha_r = p, \; r = 1, 2, \ldots.$$

Silloin

$$\mu_2 = p - p^2, \; \mu_3 = p - 3p^2 + 2p^3 \text{ ja } \mu_4 = p - 4p^2 + 6p^3 - 3p^4.$$

□

Huomattakoon, että minkä tahansa satunnaismuuttujan positiivinen osa on $X^+ = max(X, 0)$ ja negatiivinen osa $X^- = max(-X, 0)$. Silloin

$$X = X^+ - X^- \text{ ja } |X| = X^+ + X^-.$$

Nyt siis

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-).$$

Olkoon X:n todennäköisyysfunktio $f(x)$. Silloin X:n jakauma on *symmetrinen pisteen* a suhteen, jos

$$f(a - x) = f[-(a - x)]$$

kaikilla x:n arvoilla. Jos $E(X)$ on olemassa, niin silloin $E(X) = a$. Jos jakauma on symmetrinen, niin $E(X - \mu)^+ = E(X - \mu)^-$. Silloin X:n kaikki parittomat keskusmomentit ovat nollia.

Jakauman *vinouskerroin,* josta käytetään merkintää γ_1, määritellään seuraavasti:

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{3.5.1}$$

missä μ_3 on jakauman 3. keskusmomentti ja $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ on hajonta.

Symmetrisen jakauman vinouskerroin on nolla. Jos jakaumalla on pitkä häntä oikealle, kuten Poissonin jakaumalla ja geometrisella jakaumalla, niin jakauma on positiivisesti vino ja $\gamma_1 > 0$. Jos jakaumalla on pitkä häntä vasemmalle, niin $\gamma_1 < 0$. Jakaumalla on tietysti oltava 3. momentti, jotta vinouskerroin voidaan laskea.

Huipukkuuskerrointa merkitään γ_2 ja se määritellään 4. keskusmomentin avulla seuraavasti:

$$\gamma_2 = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \tag{3.5.2}$$

missä μ_4 on X:n 4. keskusmomentti.

3.5.2 Momenttifunktio

Esittelemme nyt uuden todennäköisyysjakaumaan liittyvän funktion, *momentteja generoivan funtion,* jota kutsutaan lyhyesti *momenttifunktioksi* (mf). Momenttifunktio tarjoaa erään yleisen menetelmän momenttien laskemiseksi, vaikka se ei aina ole siihen tarkoitukseen helpoin tai tehokkain menetelmä. Momenttien laskemista tärkeämpää on se, että jakaumat voidaan luonnehtia kätevästi momenttifunktion avulla (mikäili se on olemassa).

Määritelmä 3.11 Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka todennäköisyysfunktio on $f(x)$ ja arvoavaruus S. Silloin reaalimuuttujan t funktio

$$M(t) = E(\mathrm{e}^{tX})$$

on satunnaismuuttujan X (tai X:n jakauman) momenttifunktio (mf), jos odotusarvo

$$E(\mathrm{e}^{tX}) = \sum_{x \in S} \mathrm{e}^{tx} f(x)$$

on olemassa jollain avoimella välillä $-a < t < a$, missä $a > 0$.

Momenttifunktion ominaisuuksia

Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y momenttifunktiot $M_X(t)$ ja $M_Y(t)$.

(Mf1) Satunnaismuuttujan $Y = aX + b$ momenttifunktio $M_Y(t) = \mathrm{e}^{bt} M_X(at)$, missä a ja b ovat annettuja vakioita. Jos erityisesti $a = 0$ ja $Y = b$ (todennäköisyydellä 1), niin $M_Y(t) = \mathrm{e}^{bt}$.

(Mf2) Jos $M_X(t) = M_Y(t)$ kaikilla t jossain nollan ympäristössä, niin X:llä ja Y:llä on sama jakauma.

(Mf3) Jos X ja Y ovat riippumattomat, niin niiden summan $Z = X + Y$ momenttifunktio on

$$M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t).$$

(Mf4) X:n momenttifunktion r. derivaatan (t:n suhteen) arvo pisteessä $t = 0$ on X:n r. momentti:

$$M(0)^{(r)} = E(X^r) = \alpha_r.$$

Satunnaismuuttujien summan määrittäminen momenttifunktion avulla on erityisen kätevää. Ominaisuus $(Mf3)$ yleistyy induktiolla usean satunnaismuuttujantapaukseen.

(Mf3') Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat, niin niiden summan $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ momenttifunktio on

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t).$$

Esimerkki Mf1 Heitetään punaista ja mustaa noppaa. Olkoon X_1 punaisen ja X_2 mustan nopan silmäluku ja silmäluvut ovat toisistaan riippumattomat. Mikä on silmälukujen summan $X = X_1 + X_2$ jakauma? Johdetaan jakauma momenttifunktioiden avulla. Kummankin nopan silmäluku $X_i \sim \text{Tasd}(1, 6),\ i = 1, 2$ toisistaan riippumatta. Silmäluvun momenttifunktio on määritelmän mukaan

$$M_{X_i}(t) = E(e^{tX_i}) = \frac{1}{6}e^{1\cdot t} + \frac{1}{6}e^{2\cdot t} + \cdots + \frac{1}{6}e^{6\cdot t},\ i = 1, 2.$$

Koska X_1 ja X_2 ovat riippumattomat, niin niiden summan momenttifunktio on

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \\
&= (\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} e^{it})^2 = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} e^{(i+j)t} \\
&= \frac{1}{36}\sum_{s=2}^{7}(s-1)e^{st} + \frac{1}{36}\sum_{s=8}^{12}(12-s+1)e^{st}.
\end{aligned}$$

Nyt siis X:n todennäköisyysfunktio on

$$P(X = s) = \begin{cases} \frac{s-1}{36}, & \text{kun } 2 \le s \le 7; \\ \frac{12-s+1}{36}, & \text{kun } 8 \le s \le 12. \end{cases}$$

□

Esimerkki Mf2 Johdetaan Bernoullin jakaumaa noudattavien riippumattomien satunnaismuuttujien $X_1, \ldots, X_n$ summan $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ jakauma. Koska jokainen $X_i \sim \text{Ber}(p)$, niin X_i:tten momenttifunktiot ovat

$$M_{X_i}(t) = e^t p + q,\ i = 1, \ldots, n,$$

missä $q = 1-p$ (Katso Esimerkki 3.17). Silloin ominaisuuden $(Mf3')$ mukaan summan S_n momenttifunktio on

$$\begin{aligned}
M_{S_n}(t) &= (e^t p + q)^n. \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(e^t p)^i q^{n-i}.
\end{aligned}$$

Jos esimerkiksi $n = 3$, niin

$$M_{S_3}(t) = q^3 + 3e^t pq^2 + 3e^{2t}p^2 q + e^{3t}p^3.$$

Silloin $M_{S_3}(0) = q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = 1$ ja S_3:n todennäköisyysfunktio on $P(S_3 = i) = \binom{3}{i}p^i q^{3-i},\ i = 0, 1, 2, 3.$ Yleisessä tapauksessa S_n:n todennäköisyysfunktio on

$$P(S_n = i) = \binom{n}{i}p^i q^{n-i},\ 0 \le i \le n,$$

joka saadaan lausekkeesta $M_{S_n}(0)$. Näin olemme saaneet binomijakauman todennäköisyysfunktion. $\square$

3.5.3 Todennäköisyydet generoiva funktio (tgf)

Diskreetin satunnaismuuttujan X todennäköisyydet generoiva funktio (tgf) $G(t)$ määritellään seuraavasti:

$$G(t) = E(t^X) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) t^{x_i}.$$

Nähdään helposti, että $G(1) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$. Sarja suppenee ainakin silloin, kun $|t| < 1$. Kun sarja derivoidaan termeittäin, saadaan

$$G'(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) t^{x_i - 1}.$$

Jos $G(t)$ on olemassa jollain välillä $(-h-1, h+1)$, $h > 0$, niin

$$G'(1) = E(X)$$

ja yleisesti

$$G^{(r)}(1) = E(X^{(r)}) = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla r. Todennäköisyydet generoiva funktio liittyy läheisesti momenttifunktioon, sillä

$$G(\mathrm{e}^t) = E(\mathrm{e}^{tX}) = M(e^t).$$

3.5.4 Todennäköisyydet generoivan funktion ominaisuuksia

Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka todennäköisyysfunktio on $P(Y = y_i) = f(y_i)$, missä $S_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ on Y:n arvojoukko. Silloin

$$|G_Y(t)| = |\sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)t^{y_i}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)|t^{y_i}| = \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i) = 1$$

kaikilla $|t| \leq 1$. Sarja siis suppenee kaikilla $t \in [0, 1]$ ja $G_Y(t)$ on määritelty koko välillä $[0, 1]$. Tavallisesti diskreetit satunnaismuuttujat saavat kokonaislukuarvoja. Määritellään kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja X siten, että $P(X = x_r) = p_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots$. Silloin X:n todennäköisyydet generoiva funktio on

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r t^r, \text{ kun } |t| \leq 1.$$

(Tgf1) $G_X(t) = M_X(e^t)$.

(Tgf2) Jos $M_X(t) = M_Y(t)$ kaikilla t jossain nollan ympäristössä, niin X:llä ja Y:llä on sama jakauma.

(Tgf3) Jos X ja Y ovat riippumattomat, niin niiden summan $Z = X + Y$ tgf on

$$G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

(Tgf4) X:n momenttifunktion r. derivaatan (t:n suhteen) arvo pisteessä $t = 1$ on X:n r. tekijämomentti:

$$G(1)^{(r)} = E(X^{(r)}).$$