

Matemaattinen tilastotiede

Esimerkki: Regressio/Luennot 41. vko 2006

Olkoot X ja Y sellaiset satunnaismuuttujat, että $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$, $\text{Var}(Y) = \sigma_Y^2$ ja $\rho = \text{Cor}(X, Y)$. Käytetään Y :n arvioimiseen regressioennustetta $\hat{Y} = \alpha + \beta X$, missä α ja β ovat vakioita. Ennusteen keskineliövirhe määritellään

$$MSE(\hat{Y}) = E\{[Y - (\alpha + \beta X)]^2\}.$$

Voit myös olettaa oikeaksi tuloksen

$$MSE(\hat{Y}) = [\mu_Y - (\alpha + \beta\mu_X)]^2 + \text{Var}(Y - \beta X).$$

1. Valitse edellisessä $MSE(\hat{Y})$:n lausekkeessa $\alpha = \mu_Y - \beta\mu_X$ ja näytä, että silloin

$$MSE(\hat{Y}) = (\beta\sigma_X - \rho\sigma_Y)^2 + \sigma_Y^2(1 - \rho^2).$$

2. Päätele nyt, että $MSE(\hat{Y})$ saavuttaa miniminsä $\sigma_Y^2(1 - \rho^2)$, kun $\alpha = \mu_Y - \beta\mu_X$ ja $\beta = \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}$.