Tehtävän 2.6. ratkaisu

Yhtälön

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$$

$x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$, epänegatiivisten ratkaisujen lukumäärä on

$$\binom{r+k-1}{k-1}$$

Ks. esimerkki 2.4 sivulla 26.

Tehtävässä kaikkien mahdollisten alkeistapausten lukumäärä on yhtälön $x_1+x_2+x_3 = 10$ ($x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$) epänegatiivisten ratkaisujen lukumäärä, joka on

$$\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66.$$

a) Koska $x_1 = 0$ yhtälössä $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, niin saadaan kahden muuttujan yhtälö $x_2 + x_3 = 10$, $x_i \geq 0$, $i = 2, 3$, jonka epänegatiivisten ratkaisujen lukumäärä on

$$\binom{10+2-1}{2-1} = \binom{11}{1} = 11.$$

Tällöin kysytty todennäköisyys on

P(prosessorille 1 ei tule yhtään työtä) $= \frac{11}{66} = \frac{1}{6}$.

b) Merkitään $A =$ "yhdelle tai useammalle ei tule työtä", $B =$ "täsmälleen yhdelle ei tule työtä" ja $C =$ "täsmälleen kahdelle ei tule työtä". Nyt $A = B \cup C$ ja $B \cap C = \varnothing$, joten $P(A) = P(B) + P(C)$. B tarkoittaa, että 1. tai 2. tai 3. prosessorilla ei ole töitä (muilla on). Prosessori, jolle ei satu töitä, voidaan valita $\binom{3}{1} = 3$ tavalla. Yhtälössä "nolla prosessia" vastaava muuttuja (esim. x_3) saa arvon 0, joten silloin yhtälöllä $x_1 + x_2 = 10$ ($x_i \geq 1$, $i = 1, 2$) on oltava positiivinen ratkaisu. Tämä saadaan määritettyä siten, että vähennetään jokaisesta x_i:stä yksi ja vastaavasti yhtälön vasemmalta puolelta vähennetään kaksi. Tällöin voidaan ratkaista yhtälö $y_1 + y_2 = 8$, $y_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Nyt molempien yhtälöiden ratkaisujen lukumäärä on sama

$$\binom{8+2-1}{2-1} = \binom{9}{1} = 9,$$

joten $N(B) = \binom{3}{1}\binom{9}{1} = 3 \cdot 9 = 27$. Kun C sattuu, niin kaikki työt ovat yhdellä prosessorilla. Tämä prosessori voidaan valita $\binom{3}{1} = 3$ tavalla. Nyt siis

$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{27}{66} + \frac{3}{66} = \frac{30}{66} = \frac{15}{33}$.

c) Jos $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_i \geq 2$, $1 \leq i \leq 3$, niin vähennetään jokaisesta x_i:stä kaksi ja vastaavasti yhtälön oikealta puolelta $3 \cdot 2 = 6$. Saadaan yhtälö $y_1 + y_2 + y_3 = 4$, $y_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 3$. Nyt molempien yhtälöiden ratkaisujen lukumäärä on sama

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15,$$

joten kysytty todennäköisyys on

P(kaikille prosessoreille tulee ainakin 2 työtä) $= \frac{15}{66}$.