1 Ehdollinen odotusarvo

Ehdollinen odotusarvo esiteltiin jo alaluvussa 3.3.2 (identiteetti (3.3.7)). Alaluvussa 4.6.1 ehdollinen odotusarvo luonnehdittiin ehdollisen jakauman odotusarvona (ks. (4.6.2) ja (4.6.4)). Määritelmän mukaan

$$E(X \mid Y = y) = \sum_x x f(x \mid y) = \sum_x x \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Huomaa, että $E(X \mid Y = y)$ on y:n funktio, eli $E(X \mid Y = y) = h(y)$. Merkitään $E(X \mid Y) = h(Y)$, missä siis $E(X \mid Y)$ on satunnaismuuttuja, joka saa arvoja $E(X \mid Y = y), y \in S_Y$. Voimme nyt laskea satunnaismuuttujan $E(X \mid Y)$ odotusarvon, joka on $E(X)$. Monissa sovelluksissa odotusarvon laskeminen on luontevinta ehdollistamisen kautta.

Lause 1. *Olkoot X ja Y mitkä tahansa kaksi satunnaismuuttujaa, joilla on odotusarvo. Silloin $E[E(X \mid Y)] = E(X)$.*

Todistus. Odotusarvon määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}
E[E(X \mid Y)] &= \sum_y E(X \mid Y = y) f_Y(y) \\
&= \sum_y \sum_x x \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y) \\
&= \sum_y \sum_x x f(x,y) \\
&= \sum_x x \sum_y f(x,y) \\
&= \sum_x x f_X(x) = E(X),
\end{aligned}$$

missä $\sum_y f(x,y) = f_X(x)$ on X:n reunajakauma.

Ehdollinen varianssi

$$\begin{aligned}
Var(X \mid Y = y) &= E[(X - E(X \mid Y = y))^2 \mid Y = y] \\
&= E(X^2 \mid Y = y) - [E(X \mid Y = y)]^2
\end{aligned}$$

määriteltiin alaluvussa 4.6.1 (ks. identiteetti (4.6.4)). Ehdollinen varianssi $Var(X \mid Y)$ on satunnaismuuttuja, joka saa arvoja $Var(X \mid Y = y)$. Koska

$$Var(X \mid Y) = E(X^2 \mid Y) - [E(X \mid Y)]^2,$$

niin

$$E[Var(X \mid Y)] = E[E(X^2 \mid Y)] - E[E(X \mid Y)]^2 = E(X^2) - E[E(X \mid Y)]^2. \quad (1)$$

Lauseen 2.11 mukaan $E[E(X \mid Y)] = E(X)$, joten

$$Var[E(X \mid Y)] = E[E(X \mid Y)]^2 - [E(X)]^2. \quad (2)$$

Laskemalla yhtälöt (1) ja (2) puolittain yhteen, saadaan seuraavassa lauseessa esitettävä tulos.

Lause 2. *Mille tahansa satunnaismuutujille X ja Y pitää paikkansa identiteetti*

$$Var(X) = E[Var(X \mid Y)] + Var[E(X \mid Y)],$$

jos odotusarvot ovat olemassa.