

Matemaattinen tilastotiede

9. harjoitukset, 46. vko 2004

9.1. Olkoon X :n tiheysfunktio

$$f(x) = (1 + x)/2, \text{ kun } -1 < x < 1.$$

Laske

- (a) alakvartiili $\pi_{0,25}$, mediaani ja
- (b) X :n odotusarvo ja varianssi.
- (c) Määritä X :n kertymäfunktio.

9.2. Olkoon satunnaismuuttujan X_n tiheysfunktio $f_n(x) = n, 0 < x < \frac{1}{n}$.

- (a) Määritä X_n :n kertymäfunktio $F_n(x)$.
- (b) Piirrä X_n :n tiheysfunktio, kun $n = 1, 5$ ja 10 .
- (c) Laske X_n :n odotusarvo ja varianssi.

9.3. Oletetaan, että puhelujen kesto X noudattaa eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(10)$. Odotat jonotuspuhelimessa edellisen puhelun päättymistä. Mikä on todennäköisyys, että joudut odottamaan vuoroasi

- (a) yli 10 minuuttia,
- (b) yli 10, mutta alle 20 minuuttia?
- (c) Yli 10 minuuttia, jos edellinen puhelu on jo kestänyt 10 minuuttia?

9.4. *Kaksipuolisen eksponenttijakauman* tiheysfunktio on

$$f(x) = ke^{-|x|}, \quad \text{kun } -\infty < x < \infty.$$

- (a) Määritä vakion k arvo ja jakauman kertymäfunktio.
- (b) Osoita, että $E(X) = 0$ ja $E(X^2) = 2$.

9.5. Tarkastellaan Esimerkissä 5.7 määriteltyä satunnaismuuttujaa.

- (a) Lausu todennäköisyys $P(0 \leq X \leq 1/2)$ kertymäfunktion avulla ja laske sen arvo.
- (b) Osoita yleisesti, että

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X = b).$$

9.6. Olkoot α, β ja k positiivisia vakioita. Jatkuva satunnaismuuttuja X , jonka tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} kx^{-\beta-1} & \text{kun } x \geq \alpha \\ 0 & \text{muutoin,} \end{cases}$$

noudatta *Pareton jakaumaa*. Pareton jakaumalla mallinnetaan usein tulojen jakautumista, kun minimipalkka on α .

- (a) Laske k (α :n ja β :n funktiona) ja johda X :n kertymäfunktio.
- (b) Määritä Pareton jakauman mediaani.
- (c) Määritä Pareton jakauman keskiarvo ja varianssi. Ovatko ne aina olemassa?