Matemaattinen tilastotiede
6. harjoitukset, 42. vko 2004

6.1. Valitaan satunnaisesti yksi numeroista $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Toistetaan valinta 100 kertaa (valinnat toisistaan riippumattomat).

(a) Mitä jakaumaa noudattaa nollien lukumäärä X otoksessa?

(b) Laske todennäköisyys, että saadaan vähemmän kuin 10 nollaa.

(c) Laske nollien lukumäärän odotusarvo.

6.2. Testi muodostuu monivalintattehtävistä, joissa on 3 vaihtoehtoa. Täsmälleen yksi vaihtoehto on oikea ja muut vääriä. Testattavat saavat kysymyksiä yhden kerrallaan, kunnes ovat vastanneet 8:aan kysymykseen oikein.

(a) Käytännössä testi päättyy, kun on vastannut 8 oikein tai on yrittänyt 20 kertaa. Mikä on arvaajan todennäköisyys läpäistä testi?

(b) Laske arvaajan antamien vastausten lukumäärän odotusarvo?

(Ks. alaluvut 4.3.1 ja 4.3.2)

6.3. Satunnaismuuttujan X momenttifunktio on

$$M(t) = \frac{2}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{3t}.$$

Laske $\mathrm{E}(X)$ ja $\mathrm{Var}(X)$ momenttifunktion avulla. Mikä on X:n todennäköisyysfunktio? (Ks. alaluvut 3.5.1 ja 3.5.2 s. 77)

6.4. X:n jakauman *vinouskerroin* $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, missä $\mu_3 = \mathrm{E}[(X-\mu)^3]$ on jakauman 3. keskusmomentti ja σ on X:n hajonta. Oletetaan, että $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

(a) Laske μ_3 kun, $\alpha_3 = \mathrm{E}(X^3) = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$ (Tarkista α_3:n lauseke, jos intoa riittää).

(b) Näytä, että $\gamma_1 = (1-2p)/\sqrt{np(1-p)}$.

(c) Miten vinous (jakauman muoto) käyttäytyy, kun p on kiinnitetty ja n kasvaa rajatta?

6.5. Erääseen 90:n virheettömän kännykän tuote-erään oli sekaantunut 10 viallista. Valitaan tästä 100:n kännykän joukosta 30 kännykän otos palauttamatta. Olkoon X viallisten lukumäärä otoksessa.

(a) Määritä X:n todennäköisyysfunktio.

(b) Laske $P(X = 10)$.

(c) Valitaan kännyköitä testaukseen satunnaisotannalla yksitellen palauttamatta, kunnes kaikki vialliset on löydetty. Olkoon Y tarvittavien testien lukumäärä. Laske $P(Y \geq 20)$, eli todennäköisyys, että tarvitaan ainakin 20 testiä.

(Ks. alaluku 2.6, s.38 ja 3.7.1 s. 86)

6.6. Heitetään harhatonta lanttia, kunnes saadaan toistos RR (kaksi kruunua peräkkäin). Olkoon X tarvittavien heittojen lukumäärä. Fibonaccin luvut määritellään siten, että $f_1 = f_2 = 1$ ja $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n = 3, 4, \ldots$. Nyt X:n todennäköisyysfunktio on (Ei vaikea osoittaa, jos haluat huviksesi yrittää!)

$$f(x) = \frac{f_{x-1}}{2^x}, \qquad x = 2, 3, 4, \ldots.$$

(a) Osoita tuloksen

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^x]$$

avulla, että $f(x)$ on todennäköisyysfunktio (ts. $\sum_{x=2}^{\infty} f(x) = 1$).

(b) Näytä, että $\mathrm{E}(X) = 6$. (Voit halutessasi "osoittaa"myös laskemalla, esim R:llä.)

(c) Laske $\mathrm{Var}(X)$, jos $\mathrm{E}[X(X-1)] = 52$.