Matemataattinen tilastotiede
5. harjoitukset, 41. vko 2004

5.1. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on $S_X = \{x_1, x_2\}$ ja todennäköisyysfunktio $P(X = x_1) = p,\ P(X = x_2) = 1 - p$.

(a) Laske $\mathrm{E}(X^r),\ r = 1, 2$ ja

(b) $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Mitä ovat edellisten kohtien tulokset, kun $x_1 = 0$ ja $x_2 = 1$.

5.2. Olkoon $X \sim$Ber(p) (ks. alaluku 4.2) ja Y on sellainen satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on $S_Y = \{y_1, y_2\}$ ja todennäköisyysfunktio $P(Y = y_1) = 1 - p,\ P(Y = y_2) = p$. Määritä Y:n jakauma X:n jakauman avulla. (Ts. määritä vakiot a ja b muunnoksesa $Y = aX + b$ siten, että $P(X = 0) = P(Y = y_1) = 1 - p$ ja $P(X = 1) = P(Y = y_2) = p$.

5.3. Heitetään lanttia n kertaa (n riippumatonta Bernoullin koetta). Olkoon kruunun (R) todennäköisyys p ja X toistosten RR lukumäärä heittosarjassa.

(a) Mitä on $\mathrm{E}(X)$? Mikä on $\mathrm{E}(X)$:n arvo, kun $p = \frac{1}{2}$ ja $n = 200$?

(b) Mitä on toistosten RRR lukumäärän odotusarvo?

(Vihje: Katso Esimerkki 4.3)

5.4. Hatussa on N yhdestä lähtien juoksevasti numeroitua arpalippua. Valitaan hatusta n:n arvan satunnaisotos palauttaen (ks. Esimerkki 4.2). Olkoon X suurin valittujen arpalippujen numeroista.

(a) Piirrä X:n todennäköisyysfunktion ja

(b) kertymäfunktion kuvaaja, kun $N = 100$ ja $n = 10$. (ks. R-esimerkit verkossa)

(c) Tarkastele X:n odotusarvon käyttäytymistä n:n funktiona, kun $N = 100$.

(Vihje: Katso Esimerkki 4.2)

5.5. Heitetään lanttia kahdesti. Olkoon X kruunujen ja Y klaavojen lukumäärä.

(a) Luettele satunnaismuuttujan XY mahdolliset arvot (arvojoukko).

(b) Määritä XY:n todennäköisyysfunktio.

(c) Laske $\mathrm{E}(XY)$,

(d) $\mathrm{Cov}(X, Y)$ ja

(e) $\mathrm{Cor}(X, Y)$.

5.6. Viininmaistajien pätevyyskokeeseen osallistuu 10 kokelasta, jotka on numeroitu 1:stä 10:een. Vastaavasti tunnistettavia viinimerkkejä on 10 kappaletta ja ne on numeroitu 1:stä 10:een siten, että esimerkiksi merkki A on 1, merkki B on 2 jne. Viininäytteet on asetettu riviin satunnaiseen järjestykseen. Maistettuaan viinejä kokelaiden on esitettävä yksi yhteinen mielipide ja kiinnitettävä näytteisiin merkkiä osoittava numerolappu.

(a) Jos kokelaat ovat pelkkiä arvaajia, millä todennäköisyydellä ainakin yksi arvaus menee oikein? (Vihje: Sovella Esimerkin 3.21 tekniikkaa.)

(b) Mikä on oikeiden arvausten odotusarvo? (Vihje: Muodosta satunnaismuuttujien $X_1, \dots, X_{10}$ summa, missä $X_i = 1$ on "i. kokelaan arvaus oikein"ja $X_i = 0$ on "i. kokelaan arvaus väärin")