Matemaattinen tilastotiede
4. harjoitukset, 40. viikko 2004
(Tehtävät 1-6, 7. ylimääräinen)

4.1. Osoita, että

$$P(B|A) = P(B \cap E|A) + P(B \cap E^c|A)$$

kaikilla $B, E \subset \Omega$ ja kaikilla sellaisilla $A \subset \Omega$, että $P(A) > 0$.

4.2. Tarkastele Esimerkkiä 3.4 (Papa-koe). Laske todennäköisyys $P(V)$, että kokeessa saadaan virheellinen tulos, kun

(a) $p = b = c = d = 0.1$ ja

(b) $p = 0.5, b = 0.1$ ja $c = d = 0.01$.

4.3. Olkoon ρ satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatiokerroin $\mathrm{Cor}(X, Y)$. Osoita, että

(a) $-1 \leq \rho \leq 1$.
(Vihje: Sovella Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöä satunnaismuuttujiin $X - \mathrm{E}(X)$ ja $Y - \mathrm{E}(Y)$.)

(b) Laske $\mathrm{Cor}(aX + b, cY + d)$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.

4.4. Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sellaisia satunnaismuuttujia, että

$$\mathrm{Var}(X_i) = 1 \quad \text{ja} \quad \mathrm{Cor}(X_i, X_j) = \rho, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j.$$

(a) Perustele, miksi $\rho \geq -1$, kun $n = 3$.

(b) Osoita, että $\rho \geq -\frac{1}{n-1} \quad (n \geq 2)$.

4.5. Oletetaan, että $\mathrm{E}(X^2)$ ja $\mathrm{E}(Y^2)$ ovat olemassa ja $\mathrm{E}(X^2) \neq 0$. Merkitään $c = \frac{\mathrm{E}(XY)}{\mathrm{E}(X^2)}$. Osoita, että

(a) $\mathrm{E}[(Y - cX)^2] \geq 0$ ja

(b) $\mathrm{E}[(Y - cX)^2] = \mathrm{E}(Y^2) - \frac{[\mathrm{E}(XY)]^2}{\mathrm{E}(X^2)}$.

4.6. Olkoon X sellainen satunnaismuuttuja, että $\mathrm{Var}(X) = 0$. Osoita, että X on vakio todennäköisyydellä 1. (Vihje: Tarkastele Tšebyševin epäyhtälön avulla todennäköisyyttä $P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \frac{1}{n})$, kun $n \to \infty$.)

4.7. Oletetaan, että satunnaismuuttujalla X on odotusarvo ja funktio $g(x)$ on konveksi.

(a) Todista *Jensenin epäyhtälö*

$$\mathrm{E}[g(X)] \geq g[\mathrm{E}(X)].$$

(Vihje: Sijoita alla esitettyyn konveksin funktion määritelmään $a = \mathrm{E}(X)$ ja x:n paikalle satunnaismuuttuja X. Ota odotusarvo puolittain ja sovella Lausetta 3.2(3).)
Määritelmä: Funktio $g(x)$ on konveksi, jos jokaista $a \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa sellainen $\lambda(a)$, että

$$g(x) - g(a) \geq \lambda(a)(x - a)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(b) Osoita, että $\mathrm{E}(|X|) \geq |\,\mathrm{E}(X)|$. (Näytä ensin, että $|x|$ on konveksi.)