

Matemaattinen tilastotiede

12. harjoitukset, 49. vko 2004

- 12.1. Olkoon \bar{X}_n havaintojen X_1, X_2, \dots, X_n keskiarvo. Saadaan uusi havainto X_{n+1} . Osoita seuraavat tulokset:
- (a) $(n + 1)$:n havainnon keskiarvo \bar{X}_{n+1} voidaan lausua muodossa $\bar{X}_{n+1} = \frac{n\bar{X}_n + X_{n+1}}{n+1}$.
 - (b) Jos havainnot ovat otos normaalijakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$ [ts. X_i :t ovat riippumattomat ja $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $1 \leq i \leq n$], niin $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ [Vihje: Lause 5.4]. Mitä jakaumaa noudattaa \bar{X}_{n+1} ?
- 12.2. Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n on otos normaalijakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$ kuten tehtävässä 1(b). Silloin n :n havainnon otosvarianssi on $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Saadaan uusi havainto X_{n+1} . Voidaan osoittaa, että $nS_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + \frac{n}{n+1}(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2$.
- (a) Totea, että arvolla $n = 1$ saadaan $S_2^2 = \frac{1}{2}(X_2 - X_1)^2$.
 - (b) Mitä jakaumaa $\frac{S_2^2}{\sigma^2}$ noudattaa? [Vihje: Mitä jakaumaa $X_2 - X_1$ noudattaa Lauseen 5.4 mukaan? Sovella sitten Lausetta 5.6].
- 12.3. Kilon porkkanapussien paino noudattaa normaalijakaumaa $N(1.18, 0.07^2)$ ja kolmen kilon pussien paino normaalijakaumaa $N(3.22, 0.09^2)$. Valitaan satunnaisesti 3 kilon pussia. Mikä on todennäköisyys, että pussien yhteenlaskettu paino on suurempi kuin satunnaisesti valitun kolmen kilon pussin paino?
- 12.4. Oletetaan, että (X, Y) noudattaa kaksiulotteista standardimuotoista normaalijakaumaa $N_2(0, 1; \rho)$ [$X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$ ja $\text{Cor}(X, Y) = \rho$].
- (a) Laske odotusarvo $E[(X - aY - b)^2]$, missä a ja b ovat vakioita.
 - (b) Merkitään $q(a, b) = E[(X - aY - b)^2]$. Millä a :n ja b :n arvoilla funktio $q(a, b)$ saavuttaa miniminsä?
- 12.5. Oletetaan, että (X, Y) noudattaa kaksiulotteista standardimuotoista normaalijakaumaa $N_2(0, 1; \rho)$. Olkoon
- $$Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}X - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}Y,$$
- missä $\rho \neq 1$.
- (a) Osoita, että Y ja Z ovat riippumattomat [Riittää osoittaa, että $\text{Cor}(Y, Z) = 0$. Miksi?]

(b) Mitä jakaumaa siis (Y, Z) noudattaa?

12.6. Olkoon X uuden koneen kesto aika rikkoontumiseen asti. Oletetaan, että X noudattaa eksponenttijakaumaa keskiarvolla θ . Rikkoontunut kone korjataan ja korjauksen jälkeen se toimii lisääjän Y , kunnes se taas rikkoontuu. Satunnaismuuttuja Y noudattaa eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(\frac{\beta}{x})$ ehdolla, että $X = x$.

(a) Määritä X :n ja Y :n yhteisjakauman tiheysfunktio ja

(b) Y :n reunajakauman tiheysfunktio.