

Matemaattinen tilastotiede

11. harjoitukset, 48. vko 2004

- 11.1. Osoita, että Esimerkissä 5.18 määritellyt satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat.
- 11.2. Tarkastellaan Esimerkissä 5.20 määriteltyjen satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakaumaa.
- (a) Osoita, että $E(X|y) = \frac{y}{2}$, $0 \leq y \leq 1$.
 - (b) Laske $\text{Var}(X|y)$.
- 11.3. Oletetaan, että satunnaisvektori (X, Y) noudattaa kaksiulotteista tasajakaumaa (ks. Esimerkki 5.21).
- (a) Laske $P(0.2 < X < 0.5, 0.6 < Y < 1)$, jos $(X, Y) \sim \text{Tas}[(0, 1) \times (0, 1)]$.
 - (b) Laske $P(1 < X < 3, 3 < Y < 6)$, jos $(X, Y) \sim \text{Tas}[(0, 5) \times (1, 10)]$.
Lausu todennäköisyys kertymäfunktion avulla.
- 11.4. Oletetaan, että $X \sim N(0, 1)$ ja $Y \sim N(0, 1)$. Laske todennäköisyys $P(X + 2Y \leq 3)$ standardimuotoisen normaalijakauman kertymäfunktion Φ avulla, kun
- (a) X ja Y ovat riippumattomat;
 - (b) $\text{Cor}(X, Y) = \frac{1}{2}$.
- 11.5. Tarkastellaan erään lintulajin yksilöiden painojakaumaa. Olkoon X uroksen paino ja Y naaraan paino grammoina. Oletetaan, että (X, Y) noudattaa kahden muuttujan normaalijakaumaa $N(415, 347; 611, 689, -0.25)$, missä esimerkiksi $E(X) = 415$ grammaa ja $\text{Var}(X) = 611$. Laske
- (a) $P(309.2 < Y < 380.6)$.
 - (b) $E(Y|x)$.
 - (c) $\text{Var}(Y|x)$.
 - (d) $P(309.2 < Y < 380.6|X = 385.1)$.
- 11.6. Olkoot X ja Y riippumattomat satunnaismuuttujat, joiden tiheysfunktio

$$f(x) = e^{-x}, \quad f(y) = e^{-y}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty.$$

Esitä satunnaisvektorin (U, V) yhteisjakauman tiheysfunktio, kun $U = X - Y$ ja $V = X + Y$.