Matemaattisen tilastotieteen perusteet
Kurssin lopputentti 17.12.2010
Ratkaisut

1. Eräältä laitokselta valmistuu opiskelijoita Poissonin prosessin mukaisesti 10 per vuosi. (a) Laske todennäköisyys, että seuraavan kolmen kuukauden aikana valmistuu ainakin 2 opiskelijaa. (b) Seuraavan kahden kuukauden aikana ei valmistu yhtään opiskelijaa.

   Ratkaisu. Katso harjoitus 3.1. □

2. Tietokoneohjattu tentti koostuu monivalintatehtävistä, joissa on 3 vastausvaihtoehtoa. Vaihtoehdoista täsmälleen yksi on oikein ja muut kaksi vääriä. Arvaajan todennäköisyys osua oikeaan on $\frac{1}{3}$. Testiohjelma antaa kysymyksiä peräkkäin yhden kerrallaan ja ilmoittaa välittömästi, onko vastaus oikein vai väärin. Testi päättyy, kun testattava on vastannut 3:een kysymykseen oikein tai yrittänyt 6 kertaa.

   (a) Mikä on todennäköisyys, että arvaajan testi päättyy neljänteen kysymykseen (Kolmas onnistuminen neljännellä)?

   (b) Millä todennäköisyydellä arvaaja suoriutuu testistä hyväksytysti?

   (c) Mikä on arvaajan antamien vastausten lukumäärän odotusarvo?

   Ratkaisu. (a) Satunnaismuuttujan $W_3 \sim \text{NBin}(3\frac{1}{3})$ arvo on w, $w = 3, 4, \ldots$, kun arvaaja osuu oikeaan 3. kerran tehtävässä numero w.

$$P(W_3 = 4) = \binom{4-1}{3-1}(\frac{1}{3})^3\frac{2}{3} = \frac{2}{27} \approx 0.074$$

   (b) Arvaaja läpäisee tentin, kun $3 \leq W_3 \leq 6$. Silloin

$$P(3 \leq W_3 \leq 6) = \sum_{w=3}^{6}\binom{w-1}{3-1}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^{x-3} \approx 0.3196.$$

   (c) Olkoon X arvaajan antamien vastausten lukumäärä. Silloin

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=3}^{5} x\,P(W_3 = x) + 6\,P(W_3 > 5) \\ &= \sum_{x=3}^{5} x\binom{w-1}{3-1}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^{x-3} + 6\,[1 - \sum_{x=3}^{5}\binom{x-1}{3-1}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^{x-3}] \approx 5.64. \end{aligned}$$

□

3. Jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

(a) Laske todennäköisyys $P(X > 1/2)$.
(b) Määritä X:n kertymäfunktio.
(c) Olkoon $Y = 2X + 1/2$. Laske $P(0 < Y < 1)$.
(d) Määritä satunnaismuuttujan $V = 1 - 3X$ tiheysfunktio.

Ratkaisu. (a)

$P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - F(1/2) = 1 - (1/2)^4 = 15/16 = 0.9375.$

(b) Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^4, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

missä $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x 4x^3 \mathrm{d}x$, kun $0 < x < 1$.
(c)

$$\begin{aligned} P(0 < Y < 1) &= P(0 < 2X + 1/2 < 1) = P(-1/2 < 2X < 1/2) \\ &= P(-1/4 < X < 1/4) = P(X < 1/4) \\ &= F(1/4) = (1/4)^4 \end{aligned}$$

(d) Satunnaismuuttujan $V = 1 - 3X$ tiheysfunktio on

$$f_V(v) = f[g(v)]|g'(v)| = 4\Big(\frac{1-v}{3}\Big)^3 \frac{1}{3} = \frac{4}{3^4}(1-v)^3,$$

kun $-2 \leq v \leq 1$ ja 0 muualla. Muunnos $x = \frac{1}{3}(1-v) = g(v)$ ja $g'(v) = -\frac{1}{3}$. □

4. Jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

(a) Määritä X:n reunajakauman tiheysfunktio $f_X(x)$.
(b) Laske $E(Y)$,
(c) $f_{Y|X}(y|0)$ (Y:n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $X = 0$) ja
(d) $E(X|y)$ (X:n ehdollinen odotusarvo ehdolla $Y = y$).

(e) Ovatko X ja Y riippumattomat (perustelu)?

(f) Laske $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2)$.

Ratkaisu. (a) Satunnaismuuttujan X reunajakauman tiheysfunktio

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}y + \int_0^1 y\mathrm{d}y = x + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(b) Vastaavasti kuin a-kohdassa, $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq 1$, joten

$$E(Y) = \int_0^1 y(y+\frac{1}{2})\mathrm{d}y = \int_0^1 (y^2 + \frac{y}{2})\mathrm{d}y = \frac{7}{12}.$$

(c) $f_{Y|X}(y|0) = \frac{f(0,y)}{f_X(0)} = \frac{y}{1/2} = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1.$

(d) Koska $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2y+1}(x+y), \quad 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$, niin

$$E(X|Y=y) = \frac{2}{2y+1}\int_0^1 (x+y)\mathrm{d}x = \frac{2+3y}{3(1+2y)}.$$

(e) Satunnaismuuttujat X ja Y eivät ole riippumattomat riippumattomat, koska

$$f(x,y) = x + y \neq (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}) = f_X(x)f_Y(y).$$

(f) $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2) = F(1/2, 1/2) = 1/8$, sillä

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= F(x,y) \\ &= \int_0^x \int_0^y (s+t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^x \Big[\int_0^y (s+t)\mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}s \\ &= \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

$\square$