Matemaattisen tilastotieteen perusteet
6. harjoitukset, 49. viikko 2010

6.1. Satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat tasajakaumaa (s. 185), jonka tiheysfunktio on

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

(a) Laske kertymäfunktion arvo $F_{X,Y}(0.6, 0.8)$.

(b) Laske todennäköisyys $P(0.25 \le X \le 0.75, 0.1 \le Y \le 0.75)$.

6.2. Lämmittimien valmistaja testaa lämmittimet kahdella testillä. Olkoon X atunnaismuuttuja, jonka arvo on testin A läpäisevien lämmittimien suhteellinen osuus ja Y testin B läpäisevien lämmittimien suhteellinen osuus. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x,y) = 8xy, \qquad 0 \le y \le x \le 1.$$

Laske $E(X)$ ja $\mathrm{Var}(X)$.

6.3. Laske tehtävän 2 jakaumasta Y:n ehdollisen jakauman (ehdolla $X = x$) odotusarvo $E(Y|X = x)$ ja varianssi $\mathrm{Var}(Y|X = x)$.

6.4. Laske tehtävän 2 jakaumasta todennäköisyydet $P(Y < 1/2)$ ja $P(Y < 1/2|X = 1/2)$.

6.5. Esimerkissä 7.7 (s. 190-191) johdetaan Y:n ehdollinen odotusarvo

$$E(Y \mid x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{0.0.1}$$

joka on x:n lineaarinen funktio. Jos $E(Y \mid x)$ on lineaarinen, niin pitää yleisesti paikkansa, että ehdollinen odotusarvo on muotoa

$$E(Y \mid x) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), \tag{0.0.2}$$

missä $\rho = \mathrm{Cor}(X,Y)$ on X:n ja Y:n välinen korrelaatio, σ_X on X:n hajonta ja σ_Y on Y:n hajonta. Tarkista laskemalla, että (0.0.1) on muotoa (0.0.2)(Huomaa, että μ_X, μ_Y ja $E(Y^2)$ on laskettu Esimerkissä 7.6. Lisäksi $E(XY) = 1/4$.).

6.6. Oleteaan, että satunnaisvektori (X,Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa, missä $\mu_X = 3.2, \mu_Y = 2.4, \sigma_X = 0.4, \sigma_Y = 0.6$ ja korrelaatio $\rho = 0.6$.

(a) Kirjoita $E(Y|X = x)$:n lauseke (ks. lause 7.9).

(b) Laske $P(Y < 1.8)$.

(c) Laske $P(Y < 1.8|X = 2.5)$.

6.7. Oleteaan, että satunnaisvektori (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa $\mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, missä $\boldsymbol{\mu} = (1, 1)^\mathsf{T}$ ja

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Kirjoita tiheysfunktion $f_{X,Y}(x, y)$ lauseke (ks. lauseke (7.6.12)).

(b) Laske $P(X < Y)$ (Sovella lauseita 7.9 ja 7.10).

6.8. Satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat kaksiulotteista normaalijakaumaa ja $\sigma_X = \sigma_Y$. Osoita, että $U = X + Y$ ja $V = X - Y$ ovat riippumattomat (Huom. Lauseen 7.10 mukaan U ja V noudatavat normaalijakaumaa).

(a) Laske Totea laskemalla, että $\mathrm{Cov}(U, V) = 0$.

(b) Osoita, että U ja V ovat riippumattomat(Ts. totea, että $f(u, v) = f_U(u) f_V(v)$).