Matemaattisen tilastotieteen perusteet
5. harjoitukset, 48. viikko 2010

5.1. Satunnaismuuttuja noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\theta)$ (Ks. alaluku 6.2.2 ja yhteys gammajakaumaan s. 170). Olkoon $Y = 2X+1$. Esitä Y:n tiheysfunktio ja momenttifunktio.

5.2. Oletetaan, että X noudattaa χ^2-jakaumaa vapausastein 23 (Alaluku 6.6.2, R:ssä funktio `chisq`, tn-funktiot R:ssä ks. R-helpistä Manuals/An Introduction to R).

(a) Laske $P(14.85 < X < 32.01)$.

(b) Määritä a ja b siten, että $P(a < X < b) = 0.95$ ja $P(a < X) = 0.025$.

(c) Laske $E(\sqrt{X})$ (Katso Lause 6.6).

5.3. Satunnaismuuttujan X momenttifunktio on $M(t) = (1 - 2t)^{-12}$ (Alaluvut 6.6.1-6.6.2).

(a) Laske $E(X)$ ja $\mathrm{Var}(X)$.

(b) Laske $P(15.66 < X < 42.98)$.

5.4. Toisistaan riippumattomat satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 noudattavat normaalijakumaa $\mathrm{N}(0, 1)$.

(a) Laske $P(|Z_i| < 1),\ i = 1, 2,$

(b) $P(|Z_1 + Z_2| < 1)$ ja $P(|\bar{Z}| < 1)$, missä $\bar{Z} = (Z_1 + Z_2)/2$.

(c) Laske $P(Z_1^2 + Z_2^2 < 1)$.

5.5. Tarkastellaan Esimerkkejä 7.1. ja 7.4. Määritelmän mukaan X:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $Y = y$ on $f(x|y) = f(x, y)/f_Y(y)$, missä $f(x, y) = (x + 2y)/12$, kuten Esimerkissä 7.1.

(a) Laske $E(X)$ ja $E(Y)$.

(b) Laske odotusarvo $E(Y|X = 1) = \sum_{y=0}^{2} yf(y|1)$. (Ks. (7.1.11) ja (7.1.12) alaluvussa 7.1.2, Esimerkki 7.8).

(c) Laske $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

5.6. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on kaksiulotteinen Bernoullin jakauma (Alaluku 7.1.4). Olkoon Taulukossa 7.1 (s. 197) $p_{00} = 1/8,\ p_{01} = 1/4,\ p_{10} = 3/8,\ p_{11} = 2/8$.

(a) Ovatko X ja Y riippumattomat?

(b) Laske $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

5.7. Olkoon X ässien ja Y jätkien lukumäärä satunnaisesti valitussa pokerikädessä (5 satunnaisesti valittua korttia 52:n kortin normaalipakasta.)

(a) Määritä satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman todennäköisyysfunktio $f(x, y)$.

(b) Määritä X:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $Y = 2$.

5.8. Ammutaan pyöreään P-keskiseen tauluun, jonka säde on 1 (yksikköympyrä). Osumapiste noudattaa tasajakaumaa yksikköympyrässä, eli todennäköisyys osua mihin tahansa P-keskiseen a-säteiseen ympyrään on a^2, kun $a \leq 1$. Olkoon X osuman etäisyys keskipisteestä P. Määritä X:n tiheysfunktio.