Matemaattisen tilastotieteen perusteet
2. harjoitukset, 45. viikko 2010

2.1. Satunnasimuuttujan X momenttifunktio (Alaluku 4.6.2) on

$$M(t) = e^t \frac{2}{5} + e^{2t} \frac{1}{5} + e^{3t} \frac{2}{5}.$$

Määritä $E(X), \mathrm{Var}(X)$ ja X:n todennäköisyysfunktio.

2.2. Oletetaan, että $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Laske $E(X)$ ja $E(X^2)$ momenttifunktion avulla.

2.3. Isä pyytää perheen lapsia leikkaamaan takapihan nurmikon. Koska hän ei määritä, kenen pitäisi homma tehdä, kukin kolmesta lapsesta heittää lanttia. Jos kaikki kolme saavat kruunan tai kaikki kolme klaavan, he heittävät lanttia uudestaan. Näin jatketaan, kunnes joku lapsista saa eri tuloksen kuin kaksi muuta. Eri tuloksen saanut leikkaa nurmikon. Olkoon p kruunan ja $q = 1 - p$ klaavan todennäköisyys. (a) Laske todennäköisyys, että päätös saadaan alle n:ssä heitossa. (b) Jos $p = 1/2$, mikä on minimimäärä heittoja päätöksen saamiseksi todennäköisyydellä 0.95? (geometrinen jakauma)

2.4. Pelaajat A ja B pelaavat peliä, jossa A voittaa B:n todennäköisyydellä $0 < p < 1$ ja häviää B:lle todennäköisyydellä $q = 1 - p$. Yksittäiset pelit ovat toisistaan riippumattomia. Jokaisen pelin jälkeen hävinnyt maksaa euron pankkiin ja voittaja jää ennalleen. Pelin alussa A:lla on a euroa ja B:llä on b euroa. Millä todennäköisyydellä B:ltä loppuvat rahat? Jos $a = b = 4$ ja $p = 0.6$, mikä on todennäköisyyden numeerinen arvo? (negatiivinen binomijakauma)

2.5. Pelaat ruletissa ”punaista”. Punainen sattuu todennäköisyydellä $p = 18/37$. Olkoon $X_i = 1$, kun punainen sattuu i. kierroksella, muuten $X_i = 0$. Olkoon W pienin sellainen n:n arvo, että $X_1 + \cdots + X_n = 1$ (geometrinen jakauma). Pelaat niin kauan, kunnes $W = 1$. Pistät k. kierroksella panoksen 2^{k-1}, jonka saat, jos sattuu punainen ja muuten menetät tuon summan. (a) Laske panostamasi summan odotusarvo $E(2^{W-1})$. Oletetaan, että panoksen yläraja on 2^S (Pystyt voittamatta pelaamaan korkeintaan $S + 1$ kierrosta). (b) Millä todennäköisyydellä $1 \leq W \leq S + 1$, (c) Mikä on voittosi odotusarvo?

2.6. Järvessä on N täysimittaista kuhaa. Pyydystetään 25 kuhaa, merkitään ne ja lasketaan takaisin järveen. Myöhemmin pyydystetään kuhia yksitellen, kunnes saadaan 5 merkittyä kuhaa. Mikä on todennäköisyys, että täytyy pyydystää korkeintaan 50 kuhaa, kunnes saadaan 5 merkittyä? Laske pyydystettävien kalojen lukumäärän odotusarvo. Laske numeeriset arvot, kun $N = 500$. (Negatiivinen hypergeometrinen jakauma)

2.7. Eräässä 60 henkilön ryhmässä on 40 ehdokkaan A kannattajaa ja 20 vastustajaa. Haastatellaan ryhmän jäseniä satunnaisessa järjestyksessä, kunnas löydetään 10 kannattajaa. Laske haastateltavien lukumäärän odotusarvo. Mikä on todennäköisyys, että kannattajat ovat enemmistönä haastatelluista?

2.8. Populaation alkioiden lukumäärä $N = a + b$, joista a kappaletta on tyyppiä A, b kappaletta tyyppiä B ja $p = a/N$. Näytä, että hypergeometrisen jakauman $\mathrm{HGeo}(n, N, p)$ todennäköisyysfunktio (5.3.12) [sivulla 125] voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x) = \binom{n}{x} a^{(x)} b^{(n-x)} / (a+b)^{(n)}, \tag{0.0.1}$$

missä $a^{(x)} = a(a-1)\cdots(a-x+1)$.