Matemaattisen tilastotieteen perusteet
1. harjoitukset, 44. viikko 2010

1.1. Satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(1, p)$, $0 < p < 1$ (eli Bernoullin jakauma $\mathrm{Ber}(p)$). Laske $E(XY)$, kun (a) ei oleteta X:n ja Y:n riippumattomuutta ja kun (b) oletetaan riippumattomuus.

1.2. Informaatiolähde lähettää 6-numeroisen viestin binäärikoodina (numeroita 0 ja 1) viestintäkanavaan. Jokainen numero valitaan satunnaisesti toisistaan riippumatta ja numeron 1 todennäköisyys on 0.3. Laske todennäköisyydet, että (a) viestissä on 3 ykköstä (b) vähemmän kuin 2 nollaa.

1.3. Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(n, p)$. Tiedetään, että $E(X) = 10.4$ ja $\mathrm{Var}(X) = 3.64$. Laske todennäköisyys $P(X = 7)$.

1.4. Olkoon Z sellainen satunnaismuuttuja, että Z ja $-Z$ noudatavat samaa jakaumaa (vrt. Alaluku 5.2.1). Tiedetään, että $P(Z = 1) = 0.15$, $P(Z = 2) = 0.1$ ja $P(Z = 5) = 0.25$. Määritä Z:n jakauma.

1.5. (Esimerkki 2.13, Alaluku 2.6, s.37) Pekka ja Paavo pelaavat ”kruunaa ja klaavaa”. Pelissä heitetään peräkkäin lanttia 20 kertaa. Aina kun tulee kruuna (R), Paavo maksaa euron Pekalle. Kun tulee klaava (L), Pekka maksaa euron Paavolle. Olkoon $X_i = 1$, kun i. heitto ”kruuna”ja $X_i = 0$, kun ”klaava”. Heittojen tulokset ovat toisistaan riippumattomat. Määritellään satunnaismuuttuja $Y_i = 2X_i - 1$, joka on Pekan voitto i. heitossa. Silloin $\sum_{i=1}^{20} Y_i$ on Pekan voitto/tappio 20:n heiton sarjassa. Laske todennäköisyydet (a) $P(Y = 0)$ ja (b) $P(Y \geq 10)$.

1.6. Kommunikaatiosysteemi koostuu n:stä komponentista. Kukin komponentti toimii (toisistaan riippumatta) todennäköisyydellä p. Systeemi toimii, jos ainakin puolet komponenteista toimii. Olkoon K_n toimivien komponenttien lukumäärä n:n komponentin systeemissä ja $K_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Systeemi toimii todennäköisyydellä $P(K_n \geq \frac{n}{2})$. Millä p:m arvoilla 5:n komponentin systeemin todennäköisyys toimia on suurempi kuin 3:n komponentin systeemin todennäköisyys toimia?

1.7. Heitetään lanttia 6 kertaa (6 riippumatonta Bernoullin koetta). Olkoon X kruunien ja Y klaavojen lukumäärä ja kruunan todennäköisyys yhdessä heitossa on p.

(a) Laske $P(X = Y)$.

(b) Milloin X ja Y noudattavat samaa jakaumaa?

1.8. Eräs 1000 henkilön joukko on peräisin populaatiosta, jossa HIV:in prevalenssi on p (Kun satunnaisesti valitaan yksi henkilö, niin valitulla on HIV todennäköisyydellä p). Otetaan jokaiselta 1000:lta verinäyte. Jos henkilöllä on HIV, niin näytteestä tehty testi on positiivinen (+). Jos HIV:iä ei ole, testin tulos on $-$ (näyte on puhdas). Verinäyteitä ei kuitenkaan testata suoraan, vaan jokaisen henkilön verinäyte jaetaan ensin kahteen eri näyteputkeen (A ja B). B-putkista muodostetaan kaksikymmentä 50 putken ryhmää ja jokaisessa kahdessakymmenessä ryhmässä yhdistetään nuo 50 B-putken näytettä yhdeksi yhdistetyksi näytteeksi. Yhdistetystä näytteestä tehty testi on positiivinen, jos yhdelläkin 50:stä näytteen antaneesta on HIV ja silloin testataan kaikkien yhdistettyyn näytteeseen kuuluvien A-näytteet. Näiden 50 testin perusteella saadaan selville ne, joilla on HIV. Jos yhdistetty näyte on puhdas, A-näytteitä ei tarvitse testata.

(a) Mikä on todennäköisyys, että yksittäisestä yhdistetystä näytteestä tehty testi on positiivinen (näyte ei ole puhdas)?

(b) Mitä jakaumaa noudattaa ei-puhtaiden näytteiden lukumäärä?