

## Matemaattisen tilastotieteen perusteet

### 6. harjoitukset, 50. vko 2009

- 6.1. Satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat kahden muuttujan normaali-jakaumaa parametrein  $\mu_X = -3$ ,  $\mu_Y = 10$ ,  $\sigma_X^2 = 25$ ,  $\sigma_Y^2 = 9$  ja  $\rho = 3/5$ . Laske
- (a)  $P(-5 < X < 5|Y = 13)$
  - (b)  $P(7 < Y < 16)$
  - (c)  $P(7 < Y < 16|X = 2)$ .
- 6.2. Olkoon  $X$  isän pituus ja  $Y$  tyttären pituus. Oletetaan, että  $X$  ja  $Y$  noudattavat kahden muuttujan normaalijakaumaa parametrein  $\mu_X = 180$ ,  $\mu_Y = 152$ ,  $\sigma_X = 7.6$ ,  $\sigma_Y = 6.9$  ja  $\rho = 0.45$ . Laske todennäköisyys, että tyttären pituus on ainakin 150, jos isän pituus on 178.
- 6.3. Olkoon  $\text{Var}(X) = \sigma_1^2$ ,  $\text{Var}(Y) = \sigma_2^2$  ja  $\text{Cor}(X, Y) = \rho$ . Millä vakion  $\alpha$  arvolla satunnaismuuttujan  $\alpha X + Y$  varianssi saavuttaa miniminsä?
- 6.4. Oletetaan, että  $X \sim N(0, 1)$  ja  $Y \sim N(0, 1)$ . Laske todennäköisyys  $P(X + 2Y \leq 3)$  standardimuotoisen normaalijakauman kertymäfunktio  $\Phi$  avulla, kun
- (a)  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomat;
  - (b)  $\text{Cor}(X, Y) = \frac{1}{2}$ .
- 6.5. Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat tasajakaumaa  $\text{Tas}(0, 1)$ . Laske todennäköisyydet
- (a)  $P(|X - Y| \leq \frac{1}{2})$  ja
  - (b)  $P(|\frac{X}{Y} - 1| \leq \frac{1}{2})$ .
- 6.6. Satunnaisvektori  $(X_1, X_2) \sim N_2(\cdot, \cdot)$ , missä  $E(X_i) = i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\text{Var}(X_1) = 1$ ,  $\text{Var}(X_2) = 7$  ja  $\text{Cov}(X_1, X_2) = -2$ . Mitä jakaumaa noudattaa  $(Y_1, Y_2)$ , kun  $Y_1 = X_1 + X_2$  ja  $Y_2 = 2X_1 - 3X_2$ ?
- 6.7. Riippumattomat satunnaismuuttujat  $X_1, \dots, X_n$  noudattavat normaalijakaumaa  $N(\mu, \sigma^2)$ . Mitä jakaumaa noudattaa satunnaisvektori  $(X_1, \sum_{i=1}^n X_i)$ ?
- 6.8. Oletetaan, että  $(X, Y) \sim N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$ . Näytä, että  $(X + Y, X - Y)$  noudattaa jakaumaa  $N_2(0, 0, 2(1 + \rho), 2(1 - \rho), 0)$ . Totea riippumattomuuden määritelmän nojalla, että  $X + Y$  ja  $X - Y$  ovat riippumattomat.