

## Matemaattisen tilastotieteen perusteet

### 5. harjoitukset, 49. vko 2009

- 5.1. Esimerkissä 7.4 satunnaisvektorin  $(X, Y)$  todennäköisyysfunktio määriteltiin seuraavasti:

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{12}, \quad \text{kun } (x, y) \in S,$$

missä  $S = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ . Laske  $E(Y|X = 1)$  ja  $\text{Var}(Y|X = 1)$ .

- 5.2. (Jatkoa edelliseen) Laske  $\text{Cov}(X, Y)$  ja  $\text{Cor}(X, Y)$ .

- 5.3. Henkilön verenpaine  $X$  kotimittarilla mitattuna noudattaa normaalijakaumaa  $X \sim N(\mu, 2\sigma^2)$ . Terveysasemalla mitattuna verenpaine  $Y$  noudattaa normaalijakaumaa  $N(\mu, \sigma^2)$ . Jos  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomat, laske todennäköisyys, että keskiarvo  $(X+Y)/2$  poikkeaa odotusarvosta  $\mu$  korkeintaan puolitoista hajontaa.

- 5.4. Olkoot  $Z_1, Z_2$  ja  $Z_3$  riippumattomat ja ne noudattavat  $N(0, 1)$ -jakaumaa. Määritellään satunnaismuuttujat

$$\bar{Z} = \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3) \quad \text{ja} \quad U = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2.$$

Määritä vakiot  $a, b$  siten, että

$$P(|\bar{Z}| \leq a) = 0.95; \quad P(U > b) = 0.025.$$

(Vihje:  $\bar{Z}$  noudattaa normaalijakaumaa. Ks. myös Lause 6.7.

- 5.5. Laitoksen henkilökunta (23) oli jaettu kolmeen kiintiöön, joihin kuului 5, 10 ja 8 henkilöä. Erääseen komiteaan valittiin arvalla 7 henkilöä. Olkoot  $X, Y$  ja  $Z$  eri kiintiöistä komiteaan joutuvien lukumäärät. Silloin satunnaisvektorin  $(X, Y, Z)$  todennäköisyysfunktio

$$f(x, y, z) = \frac{\binom{5}{x} \binom{10}{y} \binom{8}{z}}{\binom{23}{7}},$$

kun  $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 7, 0 \leq z \leq 7, x + y + z = 7$  ja 0 muualla.

Määritä  $X$ :n todennäköisyysfunktio. [Huom.  $\sum_{r=0}^n \binom{a}{r} \binom{b}{n-r} = \binom{a+b}{n}$ ]

- 5.6. Olkoon  $X$ :n ja  $Y$ :n yhteisjakauman tiheysfunktio

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Laske  $E(X|Y = y)$  ja  $E(Y|X = x)$ .

- 5.7. Olkoon  $X$ :n ja  $Y$ :n yhteisjakauman tiheysfunktio  $f(x, y) = c(x+2y)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Määritä vakion  $c$  arvo.
- 5.8. Olkoon  $f(x, y) = 3/2$ ,  $x^2 \leq y \leq 1$ ,  $0 < x \leq 1$  satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  yhteisjakauman tiheysfunktio.
- (a) Laske  $P(0 \leq X \leq 1/2)$  ja
  - (b)  $P(1/2 \leq Y \leq 1)$ .
  - (c) Ovatko  $X$  ja  $Y$  riippumattomat ?