

## Matemaattisen tilastotieteen perusteet

### 3. harjoitukset, 47. viikko 2009

- 3.1. Olkoon satunnaismuuttujan  $X$  tiheysfunktio  $f(x) = 2(1 - x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  ja  $f(x) = 0$  muualla.
- Piirrä tiheysfunktio  $f(x)$  kuvaaja.
  - Määritä  $X$ :n kertymäfunktio.
  - Laske todennäköisyydet  $P(0 \leq X \leq 1/2)$ ,  $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$ ,  $P(X = 3/4)$  ja  $P(X \geq 3/4)$ .
- 3.2. Olkoon  $X$ :n tiheysfunktio  $f(x) = xe^x$ ,  $0 < x < 1$  ja  $f(x) = 0$  muualla.
- Osoita, että  $f(x)$  on tiheysfunktio.
  - Määritä  $X$ :n odotusarvo ja varianssi.
- 3.3. Olkoon  $f(x) = \frac{a}{x^3}$ ,  $1 < x < \infty$  ja  $f(x) = 0$  muualla.
- Määritä vakion  $a$  arvo siten, että  $f(x)$  on tiheysfunktio.
  - Laske  $E(X)$ , kun  $f(x)$  on  $X$ :n tiheysfunktio.
  - Osoita, että  $X$ :n varianssi ei ole äärellinen.
- 3.4. Satunnaismuuttujan  $X_n$  tiheysfunktio  $f_n(x) = n$ ,  $0 < x < 1/n$  ja  $f(x) = 0$  muualla, missä  $n \geq 1$  on kokonaisluku.
- Määritä  $X_n$ :n kertymfunktio  $F_n(x)$ .
  - Piirrä  $X_n$ :n tiheysfunktio ja kertymfunktio, kun  $n = 1, 5, 10$ .
- 3.5. Satunnaismuuttujan  $X$  momenttifunktio on
- $$M(t) = \frac{e^{5t} - e^{4t}}{t}, \quad t \neq 0 \text{ ja } M(0) = 1.$$
- Määritä  $E(X)$ ,  $\text{Var}(X)$  ja  $P(4.2 < X \leq 4.7)$ .
- 3.6. Satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa tasajakaumaa  $\text{Tas}(-2, 2)$ . Määritä satunnaismuuttujien  $Y = X^3$  ja  $V = X^4$  tiheysfunktiot.
- 3.7. Satunnaismuuttujan  $X$  tiheysfunktio  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$  ja  $f(x) = 0$  muualla. Määritä satunnaismuuttujien  $Y = X\sqrt{X}$  ja  $V = e^{-X}$  tiheysfunktiot.
- 3.8. Standardimuotoisen Cauchyn jakauman tiheysfunktio on
- $$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$
- Osoita, että  $\frac{1}{x}$  noudattaa standardimuotoista Cauchyn jakaumaa, jos  $X$  noudattaa standardimuotoista Cauchyn jakaumaa. Näytä, että tiheysfunktio on origon suhteen symmetrinen.