

Matemaattisen tilastotieteen perusteet

2. harjoitukset, 46. viikko 2009

- 2.1. Kolmen hengen poruhka on voittanut veikkauksessa ja he ovat sopineet, että voitto annetaan yhdelle. Kukin heittää harhatonta lanttia ja voiton saa se, jonka tulos poikkeaa muiden tuloksesta. Jos saadaan esimerkiksi RRL, niin tuloksen L saanut voittaa. Jos taas saadaan esimerkiksi RRR, heitetään uudestaan lanttia. Määritä todennäköisyys, että voittaja saadaan selville vähemmällä kuin 5:llä heittokierroksella.
- 2.2. Valitaan satunnaisesti numeroita joukosta $\{0, 1, \dots, 9\}$ yksitellen ja palauttaen, jolloin yksittäiset valinnat ovat toisistaan riippumattomia. Muodostuva luku $0.x_1x_2x_3\dots$ on satunnaisluku väliltä $(0, 1)$, missä x_1 on ensimmäisenä valittu numero, x_2 toisena valittu, jne. Kuinka monta numeroa satunnaisluvussa on keskimäärin ennen viidettä kolmosta?
- 2.3. Oletetaan, että tietyssä sairaalassa syntyy lapsia Poissonin prosessin mukaan keskimäärin 5 vuorokaudessa. Mikä on todennäköisyys, että
 - (a) ainakin kaksi lasta syntyy seuraavan kuuden tunnin kuluessa?
 - (b) yhtään lasta ei synny seuraavan kahden vuorokauden aikana?
- 2.4. Taikinaan sekoitetaan hyvin n rusinaa siten, että ne ovat jakautuneet satunnaisesti taikinaan. Tästä taikinasta leivotaan k rusinaleivosta. Rusinoille tapahtuma päätyä annettuun leivokseen on onnistuminen. Silloin rusinoiden lukumäärä X leivoksessa noudattaa binomijakaumaa $\text{Bin}(n, 1/k)$. Laske todennäköisyydet $P(X = k)$ k :n arvoilla 0, 1, 2, 3, 4, kun (a) $n = 25, k = 25$, (b) $n = 50, k = 25$ ja (c) $n = 100, k = 100$.
- 2.5. Laske edellisessä tehtävässä kysytyt todennäköisyydet Poissonin jakaumaa käyttäen ja vertaa todennäköisyyksiä edellisessä tehtävässä saattuihin todennäköisyyksiin.
- 2.6. Oletetaan, että vakavien (X) ja lievien (Y) onnettomuuksien lukumäärät ovat toisistaan riippumattomat, $X \sim \text{Poi}(1)$ ja $Y \sim \text{Poi}(3)$ (Esimerkki 5.8 ja Lause 5.11). Havaitaan, että $X + Y = 10$. Laske
 - (a) $E(X \mid X + Y = 10)$ ja
 - (b) $P(Y > 5 \mid X + Y = 10)$.
- 2.7. Eräässä kunnassa 3%:lla verovelvollisista tulot ovat yli 100000 euroa. Mikä on todennäköisyys, että 60 satunnaisesti valitun verovelvollisen joukossa korkeintaan kolmella tulot ovat yli 100000 euroa? Laske todennäköisyys sekä binomijakauman että Poissonin jakauman avulla. Mitä on kysytty tarkka todennäköisyys, jos verovelvollisten lukumäärä kunnassa on 10000.

R funktio	Jakauma	Parametrit	tnf, kf
binom	binomi	n, p	dbinom, pbinom
pois	Poissonin	λ	dpois, ppois
hyper	hypergeometrinen	a, b, n	dhyper, phyper
nbinom	negatiivinen binomi	r, p	dnbinom, pnbinom
geom	geometrinen	p	dgeom, pgeom

Taulukko 1. Jakaumien R funktioita

- 2.8. Tietyssä risteyksessä sattuu onnettomuuksia Poissonin prosessin mukaan keskimäärin 3 päivässä. Millä todennäköisyydellä tammikuussa on täsmälleen 3 päivää (ei välttämättä peräkkäisiä), jolloin ei satu yhtään onnettomuutta.