Matemaattisen tilastotieteen perusteet
1. harjoitukset, 45. viikko 2009

1.1. Heitetään lanttia 6 kertaa (6 riippumatonta Bernoullin koetta). Olkoon X kruunien ja Y klaavojen lukumäärä ja kruunan todennäköisyys yhdessä heitossa on p.

   (a) Laske $P(X = Y)$.

   (b) Mikä on satunnaismuuttujan $X + Y$ todennäköisyysfunktio?

   (c) Milloin X ja Y noudattavat samaa jakaumaa?

1.2. Paikallisessa sairaalassa syntyi viime torstaina 10 lasta, joista 6 oli poikia. Mikä on todennäköisyys, että ensimmäiset 6 synnytystä olivat poikia. Oletetaan, että pojan todennäköisyys on (a) 1/2 (b) p.

1.3. Määritä satunnaismuuttujan X todennäköisyysfunktio sekä odotusarvo ja varianssi, kun sen momenttifunktio on

   (a) $M(t) = 1/3 + (2/3)e^t$.

   (b) $M(t) = (1/4 + (3/4)e^t)^{12}$.

1.4. Jos satunnaismuuttujan X momenttifunktio on

$$M(t) = (2/5)e^t + (1/5)e^{2t} + (2/5)e^{3t},$$

määritä sen todennäköisyysfunktio, odotusarvo ja varianssi.

1.5. Laske todennäköisyys $P(1 \leq X \leq 2)$, kun X:n momenttifunktio on

$$M(t) = \sum_{x=1}^{10} \frac{1}{10} e^{tx}.$$

1.6. Oletetaan, että 400000 henkilölle tehdään perusteellinen lääketieteellinen tutkimus. Aikaisempien tutkimusten perusteella 3/4 tutkituista läpäisee testin. Laske todennäköisyys, että testin läpäisevien lukumäärä on ainakin 299000 ja korkeintaan 301000. (Käytä esimerkiksi R:n funktioita `dbinom` tai `pbinom`)

1.7. Heitetään lanttia n kertaa (n riippumatonta Bernoullin koetta). Olkoon kruunun (R) todennäköisyys p jokaisessa heitossa. Satunnasimuuttuja $X_i = 1$, kun kruunu i. heitossa, muutoin $X_i = 0$. Määritellään satunnaismuttujat Z_i, $i = 1, \dots, n-1$ siten, että $Z_i = X_i X_{i+1}$. Olkoon $Z = Z_1 + \cdots + Z_{n-1}$.

   (a) Laske $E(Z)$.

(b) Mitä on $E(Z)$:n arvo, kun $p = \frac{1}{2}$ ja $n = 200$? Miten tulkitset tuloksen?

(Vihje: Katso Esimerkki 5.3)

1.8. Olkoon $S_n = S_{n-1} + X_n$, missä satunnaismuuttujat X_n ja S_{n-1} ovat riippumattomat ja $S_1 = X_1$. Laske todennäköisyys $P(S_3 = 2)$, kun $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$, $i = 1, 2, 3$. (Vihje: Käytä identiteettiä $P(S_n = k) = P(S_{n-1} = k, X_n = 0) + P(S_{n-1} = k-1, X_n = 1)$ ja satunnaismuuttujien X_n ja S_{n-1} riippumattomuutta.)