Luku 7

Moniuloteiset jakaumat

Satunnaismuuttuja määriteltiin alaluvussa 2.5 ja luvuissa 5 ja 6 käsiteltiin yhden muuttujan jakaumia. Tässä luvussa tarkastellaan useam muuttujan jakaumia. Ensimmäisessä alaluvussa määritellään kahden satunnaismuuttujan yhteisjakauma, jakauman kertymäfunktio ja tiheysfunktio. Sitten esitetään reunajakauman ja ehdollisen jakauman käsitteet. Ehdollisen jakauman tiheysfunktion avulla voidaan sitten määritellä esimerkiksi ehdollinen odotusarvo ja varianssi.

7.1 Kaksiulotteiset jakaumat

Tilastollisissa sovelluksissa tarkastellaan tavallisesti useita muuttujia samanaikaisesti. Esimerkiksi haastattelututkimuksessa valitaan opiskelijoista satunnaisotosotos. Jokaiselta otokseen osuneelta kysytään useita kysymyksiä ja lisäksi saadaan haastateltavien taustatietoina esimerkiksi ikä, sukupuoli, asuinpaikka jne. Otosavaruudessa on siis määritelty useita muuttujia (kysymykset ja taustamuuttujat). Tällainen asetelma mahdollistaa muuttujien välisten riippuvuuksien tarkastelun. Seuraavassa esitellään usean muuttujan jakaumiin liittyvää käsitteistöä. Ensin käsitellään kahden muuttujan tapaus. Sen jälkeen on suoraviivaista yleistää tarkastelu usean muuttujan tapaukseen.

Kun teemme satunnaiskokeen, olemme usein kiinnostuneita useasta eri tuloksesta samanaikaisesti. Heitetään samanaikaisesti kahta noppaa ja havainnoidaan kummanskin nopan silmäluku. Olkoon X 1. nopan ja Y 2. nopan silmäluku. Kokeen tulos voidaan esittää kaksiulotteisen satunnaisvektorin (X, Y) avulla. Jos kurssilla on kaksi välikoetta, voidaan opiskelijan saama tulos esittää satunnaisvektorina (X, Y), missä X on 1. välikokeen ja Y on 2. välikokeen tulos. Rajoitumme tarkastelemaan tapausta, jossa molemmat satunnaismuuttujat ovat joko diskreettejä tai jatkuvia. Merkitään satunnaisvektorin (X, Y) yhteisjakaumaa $P_{X,Y}$ ja se määritellään todennäköisyytenä $P_{X,Y}(B) = P[(X, Y) \in B]$ kaikilla $B \subset \mathbb{R}^2$, missä $\mathbb{R}^2$ on 2-ulotteinen Euklidinen avaruus eli taso.

Määritelmä 7.1 Määritellään satunnaisvektorin (X, Y) yhteisjakauma ja kertymäfunktio.

1. Satunnaisvektorin (X, Y) yhteisjakauma on joukkofunktio, joka liittää $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoihin $B \subset \mathbb{R}^2$ arvot

   (7.1.1) $\quad P[(X, Y) \in B] = P(\{\omega \in \Omega |\ (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}),\ B \subset \mathbb{R}^2$

   ja B:n saamaa arvoa merkitään $P_{X,Y}(B)$.

2. Kun valitaan $B = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$, seuraa relaatiosta (7.1.1)

$$\begin{aligned} P[(X,Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y] &= P(\{\omega \in \Omega |\ (X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}) \\ &= P(X \leq x, Y \leq y). \end{aligned}$$

   Tämä relaatio määrittelee tasossa pistefunktion $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),$$

   joka on X:n ja Y:n yhteisjakauman kertymäfunktio.

Jos tunnemme jakauman $P_{X,Y}$, niin Määritelmän 7.1 mukaan voimme määrittää X:n ja Y:n yhteisjakauman kertymäfunktion $F_{X,Y}$. Käänteinen tulos pitää myös paikkansa: Kertymäfunktion $F_{X,Y}$ määrittää yksikäsitteisesti jakauman $P_{X,Y}$. Tähän käänteiseen tulokseen perustuu kertymäfunktion tärkeys todennäköisyyslaskennassa. Todistus on vaativa, eikä se kuulu tämän kurssin sisätöön. Kertymäfunktiolla $F_{X,Y}$ on samanlaisett ominaisuudet kuin yhden muuttujan kertymäfunktiolla.

Lause 7.1 *Satunnaisvektorin (X, Y) kertymäfunktiolla $F_{X,Y}$ (lyhyesti F) on seuraavat ominaisuudet:*

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$ *kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$.

2. *Jos* $x_1 \leq x_2$ *ja* $y_1 \leq y_2$, *niin* $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$.

3. $F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) \geq 0$.

4. F *on oikealta jatkuva: Jos* $x_n \to x_+$ *ja* $y_n \to y_+$, *niin* $F(x_n, y_n) \to F(x, y)$, *kun* $n \to \infty$.

5. $F(+\infty, +\infty) = 1$ *ja* $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$ *kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$. *Merkintä* $F(+\infty, +\infty)$ *tarkoittaa raja-arvoa* $\lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n)$, *kun* $x_n \to \infty$ *ja* $y_n \to \infty$.

Oletetaan nyt, että satuunaismuuttuja X ja Y ovat diskreettejä, X saa arvoja $x_i,\ i \geq 1$ ja Y arvoja $y_j,\ j \geq 1$. Satuunaismuuttujien X:n ja Y:n yhteisjakauman tiheysfunktiota merkitään $f_{X,Y}$ ja se määritellään $f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$. Silloin

$$P(B) = P[(X,Y) \in B] = \sum_{(x_i,y_j)\in B} f_{X,Y}(x_i, y_j).$$

Funktiota $f_{X,Y}$ kutsutaan myös X:n ja Y:n yhteisjakauman todennäköisyysfunktioksi silloin, kun X ja Y ovat diskreettejä.

Määritelmä 7.2 Olkoot X ja Y diskreetejä satunnaismuuttujia, jotka saavat arvoja $x_i,\ i \geq 1$ ja $y_j,\ j \geq 1$ ja niiden todennäköisyydet ovat $P(X = x_i, Y = y_j),\ i,j \geq 1$. Todennäköisyysfunktio $f_{X,Y}(x,y)$ määritellään seuraavasti

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} P(X = x_i, Y = y_j), & \text{jos } x = x_i \text{ ja } y = y_j \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Satunnaisvektorin (X,Y) arvojoukko $S = \{(x_i, y_j) | i \geq 1,\ j \geq 1\}$ voi olla äärellinen tai numeroituvasti ääretön.

Määritelmästä saadaan seuraavat X:n ja Y:n yhteisjakauman todennäköisyysfunktion ominaisuudet.

Lause 7.2 *Olkoon $f_{X,Y}(x,y)$ (lyhyesti $f(x,y)$) kuten Määritelmässä 7.2. Silloin*

1. *$f(x,y) \geq 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ja*
2. *kaikilla $B \in \mathbb{R}^2$, $P[(X,Y) \in B] = \sum_{(x_i,y_j)\in B} f(x_i, y_j)$.*
3. *Erityisesti*

$$F(x,y) = \sum\sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} f(x,y) \quad \text{ja} \quad \sum\sum_{x_i \in \mathbb{R}, y_j \in \mathbb{R}} f(x,y) = 1.$$

Esimerkki 7.1 Olkoon (X,Y) satunnaisvektori, jonka arvojoukko on

$$S = \{(0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)\}$$

ja todennäköisyysfunktio

$$f(x,y) = c(x + 2y), \qquad (x,y) \in S.$$

Todennäköisyysfunktion ominaisuuksista seuraa, että

$$\sum_{(x,y)\in S} c(x+2y) = c(2+4+1+3+2) = 12c = 1,$$

joten $c = \frac{1}{12}$. Silloin esimerkiksi

$$P(X > Y) = f(1,0) + f(2,0) = \frac{3}{12}$$

ja

$$P(X \geq Y) = f(1,0) + f(2,0) + f(1,1) = \frac{6}{12}.$$

□

Oletetaan nyt, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat jatkuvia. Lisäksi oletetaan, että on olemassa sellainen $\mathbb{R}^2$:ssa määritelty funktio $f_{X,Y}$, että kaikilla reaaliluvuilla x ja y

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Määritelmä 7.3 Olkoot X ja Y jatkuvia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että on olemassa sellainen funktio $f_{X,Y}$, että

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}, \text{ ja} \tag{7.1.2}$$

$$P[(X,Y) \in B] = \int\int_{B} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ B \subset \mathbb{R}^2. \tag{7.1.3}$$

Funktiota $f_{X,Y}$ kutsutaan satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktioksi. Määritelmästä ja analyysin perustuloksista saadaan seuraavassa lauseessa esitetyt tulokset.

Lause 7.3 *Olkoon $f_{X,Y}$ (lyhyesti f) Määritelmässä 7.3 luonnehdittu tiheysfunktio. Silloin*

1. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$ *kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$ *(Valitaan* $B = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$ *lausekkeessa (7.1.3)).*
2. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$ *(Valitaan* $B = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ *lausekkeessa (7.1.3)).*
3. $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = f(x,y)$ *kaikissa* $f(x,y)$*:n jatkuvuuspisteissä.*

Lauseen 7.3 kohta 3 seuraa integraalilaskennan peruslauseesta. Sen nojalla

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = f(x,y) \tag{7.1.4}$$

kaikissa $f(x,y)$:n jatkuvuuspisteissä. Relaatio (7.1.4) on hyödyllinen silloin, kun kertymäfunktio tunnetaan ja halutaan johtaa tiheysfunktio. Silloin tiheysfunktio $f(x,y)$ saadaan derivoimalla $F(x,y)$ sekä x:n että y:n suhteen eli laskemalla osittaisderivaatta $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$.

Esimerkki 7.2 Olkoon X:n ja Y:n yhteisjakauman kertymäfunktio

$$F(x,y) = \begin{cases} xy, & 0 \le x \le 1 \text{ ja } 0 \le y \le 1; \\ y, & x > 1,\ 0 \le y \le 1; \\ x, & y > 1,\ 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1 \text{ ja } y > 1; \\ 0, & x < 0 \text{ tai } y < 0. \end{cases}$$

Laskemalla osittaisderivaatta $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$ saadaan

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

Satunnaisvektori (X, Y) noudattaa siis kaksiulotteista tasajakaumaa $\mathrm{Tas}[(0,1)\times(0,1)]$. Todennäköisyys voidaan lausua kertymäfunktion avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} &P(x_1 \le X \le x_2,\, y_1 \le Y \le y_2) \\ &\qquad = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \Big/_{x_1}^{x_2} \Big/_{y_1}^{y_2} xy = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &\qquad = x_2 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1 \\ &\qquad = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Yleisesti pitää paikkansa, että

$$\begin{aligned} &P(x_1 \le X \le x_2,\ y_1 \le Y \le y_2) \\ &\qquad = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Kahden muuttujan tasajakauman $\mathrm{Tas}[(0,1)\times(0,1)]$ tapauksessa todennäköisyys $P\big(\frac{1}{4} \le X \le \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \le Y \le \frac{3}{4}\big)$ on

$$\begin{aligned} &F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ &\qquad = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 7.3 Olkoon X:n ja Y:n yhteisjakauman tiheysfunktio

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2(1 - |y|), \qquad -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1.$$

Määritellään $A = \{ (x,y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < x \}$. Todennäköisyys, että $(X,Y) \in A$, on

$$\begin{aligned} P[(X,Y) \in A] &= \int_0^1 \int_0^x \frac{3}{2}x^2(1-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 \Big/_0^x \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2}\left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \Big/_0^1 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right) = \frac{9}{40}. \end{aligned}$$

□

7.1.1 Reunajakaumat ja ehdolliset jakaumat

Olkoon $F_{X,Y}$ satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman kertymäfunktio ja $f_{X,Y}$ tiheysfunktio. Yhteisjakauman yhteydessä voidaan määritellä uusina käsitteinä reunajakaumat ja ehdolliset jakaumat. Tarkastellaan esimerkiksi yhteisjakauman kertymäfunktiota $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ ja annetaan y:n kasvaa rajatta eli $y \to \infty$. Silloin saadaan

$$F_{X,Y}(x,\infty) = P(X \le x, Y \le \infty) = P(X \le x) = F_X(x).$$

Näin saadaan X:n kertymäfunktio $F_X(x)$ satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman kertymäfunktiosta $F_{X,Y}(x,y)$. Jos X ja Y ovat diskreettejä satunnaismuuttujia ja $f_{X,Y}$ niiden yhteisjakauman todennäköisyysfunktio, niin

$$f_X(x_i) = P(X = x_i) = P(X = x_i, -\infty < Y < \infty) = \sum_{y_j \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x_i, y_j).$$

Tämä on X:n reunajakauman todennäköisyysfunktio yhteisjakauman todennäköisyysfunktiosta $f_{X,Y}(x_i, y_j)$.

Määritelmä 7.4 Määritellään reunajakaumien kertymä- ja tiheysfunktiot.

1. Olkoon $F_{X,Y}$ satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman kertymäfunktio. Silloin

   (7.1.5)
   $$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{X,Y}(x,\infty) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) \quad \text{ja} \\ F_Y(y) &= F_{X,Y}(\infty,y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) \end{aligned}$$

   ovat X:n ja Y:n yhteisjakuman kertymäfunktion $F_{X,Y}$ reunakertymäfunktiota. $F_X(x)$ on X:n ja $F_Y(y)$ Y:n kertymäfunktio.

2. Olkoon $f_{X,Y}$ satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio. Silloin reunajakaumien tiheysfunktiot ovat

   (7.1.6)
   $$\begin{aligned} f_X(x_i) &= \sum_{y_j \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x_i,y_j), \quad f_Y(y_j) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x_i,y_j) \text{ diskreetti} \\ f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tiheysfunktiot f_X ja f_Y ovat yhteistiheysfunktion $f_{X,Y}$ reunatiheyksiä ja f_X on X:n ja f_Y on Y:n tiheysfunktio.

3. Satunnaismuuttujat ovat riippumattomat, jos

(7.1.7) $$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{kaikilla } x,y \in \mathbb{R}.$$

Olkoot X ja Y diskreettejä satunnaismuuttujia, jotka saavat arvoja $x_i,\ i \geq 1$ ja $y_j,\ j \geq 1$. Määritellään tapahtumat $A_i = \{X = x_i\} = \{\omega |\, X(\omega) = x_i\}$ ja $B_j = \{Y = y_j\} = \{\omega |\, Y(\omega) = y_j\}$, missä $(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2$. Silloin $A_i \cap B_j = \{X = x_i,\, Y = y_j\}$. Koska

$$P(A_i \cap B_j) = P(X = x_i, Y = y_j) = f(x_i, y_j)$$

ja

$$P(B_j) = P(Y = y_j) = f_Y(y_j),$$

niin

$$P(A_i \mid B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)},$$

missä oletetaan $f_Y(y_j) > 0$. Tämän perusteella voidaankin ehdollinen todennäköisyysfunktio määritellä siten, että

(7.1.8) $$f_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}, \text{ missä } y_j \text{ on kiinnitetty ja } f_Y(y_j) > 0.$$

Jos X ja Y ovat jatkuvia satunnaismuuttujia, voimme määritellä jokaista annettua $Y = y$ ja $f_Y(y) > 0$ kohti ehdollisen tiheysfunktion vastaavasti:

(7.1.9) $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Määritelmä 7.5 Yhtälö (7.1.8) määrittelee X:n ehdollisen todennäköisyysfunktion ehdolla $Y = y_j$ ja yhtälö (7.1.9) määrittelee X:n ehdollisen tiheysfunktion ehdolla $Y = y$. Vastaavasti voidaan määritellä Y:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $X = x_i$ ja Y:n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $X = x$.

Esimerkki 7.4 Esimerkissä 7.1 käsitellyn satunnaisvektorin (X, Y) todennäköisyysfunktio on

$$f(x,y) = \frac{x + 2y}{12}, \qquad \text{kun } (x,y) \in S,$$

missä $S = \{(0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)\}$. Huomaa, että $f(x,y) = 0$, kun $(x,y) \notin S$. X:n ja Y:n reunajakaumien todennäköisyysfunktiot ovat

$$f_X(x) = \sum_{y=0}^{2} f(x,y) \qquad \text{ja} \qquad f_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} f(x,y).$$

X:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $Y = y$ on

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad x = 0, 1, 2.$$

Saadaan siis kolme X:n ehdollista todennäköisyysfunktiota:

$$\begin{aligned} f_1(x \mid 0) &= \frac{x}{3}, && x = 0, 1, 2; \\ f_1(x \mid 1) &= \frac{x+2}{5}, && x = 0, 1; \\ f_1(x \mid 2) &= 1, && x = 0. \end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla saadaan kolme Y:n ehdollista todennäköisyysfunktiota ehdolla $X = x$. Satunnaismuuttujat X ja Y eivät ole riippumattomat, koska esimerkiksi

$$f(0,1) = \frac{1}{6} \neq f_X(0) f_Y(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{24}.$$

X:n ja Y:n riippuvuutta (vs. riippumattomomuutta) on luontevaa tarkastella ehdollisen jakauman avulla. Y:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $X = 1$ on

$$f_2(y \mid 1) = \frac{f(1,y)}{f_X(1)} = \frac{1+2y}{12} \Big/ \frac{1}{3} = \frac{1+2y}{4}, \qquad y = 0, 1.$$

Koska

$$f_2(y \mid 1) \neq f_Y(y),$$

voimme jälleen päätellä, että X ja Y eivät ole riippumattomat. □

Esimerkki 7.5 Hatussa on 3 korttia, jotka on numeroitu yhdestä kolmeen. Valitaan hatusta peräkkäin satunnaisesti palauttamatta 2 korttia. Olkoon X ensiksi valitun kortin numero ja Y toisen kortin numero. Selvästikin

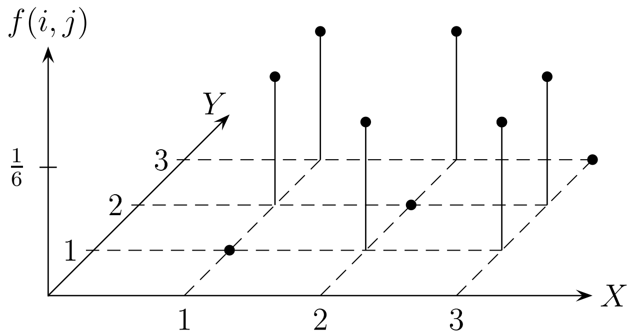
$$P(X = i) = f_X(i) = \frac{1}{3}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

On helppo havaita, että toisen valinnan tulos Y riippuu 1. valinnan tuloksesta:

$$\begin{aligned} &P(Y = 1 \mid X = 1) = 0, \qquad && P(Y = i \mid X = 1) = \frac{1}{2}, \quad && i = 2, 3; \\ &P(Y = 2 \mid X = 2) = 0, && P(Y = i \mid X = 2) = \frac{1}{2}, && i = 1, 3; \\ &P(Y = 3 \mid X = 3) = 0, && P(Y = i \mid X = 3) = \frac{1}{2}, && i = 1, 2. \end{aligned}$$

Koska $P(X = i, Y = j) = P(X = i)\, P(Y = j \mid X = i)$, niin X:n ja Y:n yhteisjakauman todennäköisyysfunktio on

$$f(i,j) = f_X(i) f_2(j \mid i) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{kun } i \neq j; \\ 0, & \text{kun } i = j;\ 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 3. \end{cases} \tag{7.1.10}$$



Kuvio 7.1. Satunnaisvektorin (X, Y) yhteisjakauman todennäköisyysfunktio $f(i, j)$, kun X on 1. valinta ja Y on 2. valinta palauttamatta joukosta $\{1, 2, 3\}$.

Satunnaisvektorin (X, Y) arvojoukko $S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$, sillä $P(X = i, Y = j) > 0$ kaikilla $(i, j) \in S$ ja $P(X = i, Y = j) = 0$, jos $(i, j) \notin S$. □

Jakauma (7.1.10) on esimerkki symmetrisestä 2-ulotteisesta jakaumasta. Diskreetin satunnaisvektorin (X, Y) *jakauma on symmetrinen,* jos sen todennäköisyysfunktio $f(x, y)$ on *symetrinen funktio.* Se tarkoittaa sitä, että

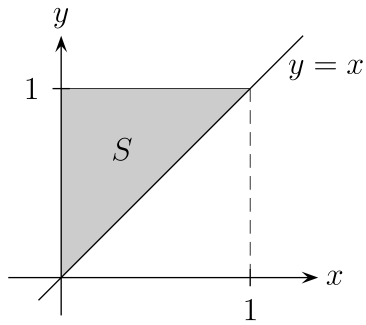
$$f(x, y) = f(y, x) \qquad \text{kaikilla } (x, y) \in S,$$

missä S on (X, Y):n arvoalue.

Esimerkki 7.6 Olkoon X:n ja Y:n yhteisjakauman tiheysfunktio

$$f(x, y) = 2, \qquad 0 \le x \le y \le 1,$$

muualla $f(x, y) = 0$. Satunnaisvektorin (X, Y) arvoavaruus on $S = \{\, (x, y) \mid 0 \le x \le y \le 1 \,\}$.



$$S = \{\, (x, y) \mid 0 \le x \le y \le 1 \,\}$$

Kuvio 7.2. Tasajakauman $f(x, y) = 2$ määrittelyalue S.

Silloin esimerkiksi todennäköisyys

$$\begin{aligned} P\left(0 \le X \le \frac{1}{2},\ 0 \le Y \le \frac{1}{2}\right) &= P\left(0 \le X \le Y,\ 0 \le Y \le \frac{1}{2}\right) \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^y 2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} 2y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Reunajakaumien tiheysfunktiot ovat

$$f_X(x) = \int_x^1 2\,\mathrm{d}y = 2(1-x), \qquad 0 \le x \le 1,$$

ja

$$f_Y(y) = \int_0^y 2\,\mathrm{d}x = 2y, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Lasketaan vielä X:n ja Y:n odotusarvot sekä Y:n 2. momentti.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 \int_x^1 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \\ E(Y) &= \int_0^1 \int_0^y 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2y^2\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}, \\ E(Y^2) &= \int_0^1 \int_0^y 2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2y^3\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odotusarvot $E(X)$, $E(Y)$ ja $E(Y)$ voidaan laskea joko suoraan reunajakaumasta tai sitten yhteisjakaumasta. □

Nähdään helposti, että Esimerkissä 7.6 satunnaismuuttujat X ja Y eivät ole riippumattomat, koska

$$f_X(x)f_Y(y) = 2(1-x)2y \neq f(x,y) = 2, \qquad (x,y) \in S.$$

Sen sijaan voidaan osoittaa, että Esimerkissä 7.3 satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat.

Esimerkki 7.7 Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y samat kuin Esimerkissä 7.6 Silloin

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2, \qquad 0 \le x \le y \le 1, \\ f_X(x) &= 2(1-x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ f_Y(y) &= 2y, \qquad 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

Määritetään nyt Y:n ehdollisen jakauman tiheysfunktio, kun $X = x$ on annettu. Määritelmän 7.5 mukaan

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x}, \qquad x \le y \le 1, \quad 0 \le x \le 1.$$

Y:n ehdollinen odotusarvo ehdolla $X = x$ on

$$E(Y \mid x) = \int_x^1 y \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}y = \bigg/_{\!x}^{1} \frac{y^2}{2(1-x)} = \frac{1+x}{2}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Samalla tavalla voidaan osoittaa, että

$$E(X \mid y) = \frac{y}{2}, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Suoraan määritelmän perusteella Y:n ehdollinen varianssi ehdolla $X = x$ on

$$\begin{aligned} E\big([Y - E(Y \mid x)]^2 \mid x\big) &= \int_x^1 \left(y - \frac{1+x}{2}\right)^2 \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}y \\ &= \bigg/_{\!x}^{1} \frac{1}{3(1-x)} \left(y - \frac{1+x}{2}\right)^3 \\ &= \frac{(1-x)^2}{12}. \end{aligned}$$

Jos $U \sim \mathrm{Tas}(a, b)$, niin $E(U) = \frac{a+b}{2}$ ja $\mathrm{Var}(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Koska Y:n ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$ on $\mathrm{Tas}(x, 1)$, niin olisimme voineet tasajakauman ominaisuuksien perusteella suoraan todeta, että

$$E(Y \mid x) = \frac{x+1}{2} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{Var}(Y \mid x) = \frac{(1-x)^2}{12}.$$

Lasketaan vielä ehdollinen todennäköisyys

$$P(3/4 \le Y \le 7/8 \mid X = 1/4) = \int_{3/4}^{7/8} f(y \mid 1/4) \, \mathrm{d}y = \int_{3/4}^{7/8} \frac{1}{3/4} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{6}.$$

□

Havaitsimme edellisessä esimerkissä, että Y:n ehdollinen odotusarvo on x:n lineaarinen funktio:

$$E(Y \mid x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Jos $E(Y \mid x)$ on lineaarinen, niin pitää yleisesti paikkansa, että

$$E(Y \mid x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X),$$

missä $\rho = \mathrm{Cor}(X, Y)$ on X:n ja Y:n välinen korrelaatio, σ_X on X:n hajonta ja σ_Y on Y:n hajonta. Jos $E(X \mid y)$ on lineaarinen, niin

$$E(X \mid y) = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y).$$

Ehdollisten odotusarvojen $E(Y \mid x)$ ja $E(X \mid y)$ yhtälöissä kertoimien $\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ ja $\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ tulo on ρ^2. Esimerkissä 7.7 näiden kertoimien tulo on $\rho^2 = \frac{1}{4}$. Siksi $\rho = \frac{1}{2}$, koska molemmat kertoimet ovat positiiviset. Näiden kertoimien suhde on σ_Y^2/σ_X^2 ja esimerkissä tämä suhde on 1. Tästä voimme päätellä, että Esimerkissä 7.7 $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

Satunnaismuuttujien X ja Y riippumattomuuden tarkistaminen suoraan relaation (7.1.7) perusteella edellyttää reunajakaumien tiheysfunktioiden $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$ tuntemista. Seuraava apulause tekee riippumattomuuden tarkistamisen jonkin verran helpommaksi, koska siinä ei edellytetä reunajakaumien tuntemista.

Apulause 7.1 *Olkoon (X, Y) kaksiulotteinen satunnaisvektori, jonka yhteisjakauman tiheysfunktio on $f(x, y)$. Silloin satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat, jos ja vain jos on olemassa sellaiset funktiot $g(x)$ ja $h(y)$, että*

$$f(x, y) = g(x)h(y) \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R} \text{ ja kaikilla } y \in \mathbb{R},$$

missä g riippuu vain x:stä ja h vain y:stä.

7.1.2 Ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia

Ehdollinen odotusarvo esiteltiin jo alaluvussa 4.1.2 (identiteetti 4.1.6). Alaluvussa 7.1.1 ehdollinen odotusarvo luonnehdittiin ehdollisen jakauman odotusarvona (ks. (7.1.11) ja (7.1.13)). Määritelmän mukaan

$$E(X|Y = y) = \sum_x x f(x|y) = \sum_x x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Ehdollisen jakauman odotusarvoa kutsutaan jakauman *ehdolliseksi odotusarvoksi.* X:n ehdollinen odotusarvo ehdolla $Y = y$ on

$$(7.1.11) \quad E(X|Y = y) = \sum_{x \in S_X} x f(x|y) \quad \text{tai} \quad E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

ja Y:n ehdollinen odotusarvo ehdolla $X = x$ on

$$(7.1.12) \quad E(Y|X = x) = \sum_{y \in S_Y} y f(y|x) \quad \text{tai} \quad E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Näitä odotusarvoja merkitään myös

$$E(X|y) = \mu_{X|y} \qquad \text{ja} \qquad E(Y|x) = \mu_{Y|x}.$$

Vastaavasti määritellään *X:n ehdollinen varianssi* ehdolla $Y = y$ ja Y:n ehdollinen varianssi ehdolla $X = x$. Y:n ehdollinen varianssi ehdolla $X = x$

on

$$\text{(7.1.13)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{Var}(Y|x) &= E\big[(Y-\mu_{Y|x})^2|x\big] \\ &= \sum_{y\in S_Y}(y-\mu_{Y|x})^2 f(y|x), \quad \text{tai} \\ \operatorname{Var}(Y|x) &= \int_{-\infty}^{\infty}[y-E(Y|X=x)]^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

jota merkitään myös $\operatorname{Var}(Y|x) = \sigma^2_{Y|x}$. Samalla periaatteella voidaan ehdollisen jakauman avulla määritellä mikä tahansa jakauman ehdollinen tunnusluku, kuten esimerkiksi ehdolliset momentit tai ehdollinen mediaani.

Kun $E(Y|x)$ lasketaan eri x:n arvoilla, riippuu tulos yleensä x:n arvosta. Jos halutaan korostaa $E(Y|x)$:n riippuvuutta x:stä, merkitään esimerkiksi $E(Y|x) = g(x)$. Silloin ehdollinen odotusarvo määrittelee funktion $g(x)$.

Esimerkki 7.8 Esimerkissä 7.4 määritettiin ehdolliset todennäköisyysfunktiot $f_1(x|0)$, $f_1(x|1)$ ja $f_1(x|1)$, kun (X,Y):n yhteisjakauman todennäköisyysfunktio on

$$f(x,y) = \frac{x+2y}{12}, \qquad (x,y)\in S.$$

Lasketaan nyt ehdolliset odotusarvot $E(X|y)$, $y = 0,1,2$:

$$\begin{aligned} E(X|0) &= 0 + 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \\ E(X|1) &= 0\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot 0 = \frac{3}{5}, \\ E(X|2) &= 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ehdolliset varianssit $\operatorname{Var}(X|y)$, $y = 0,1,2$, ovat vastaavasti:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X|0) &= \left(1-\frac{5}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(2-\frac{5}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \\ \operatorname{Var}(X|1) &= \left(0-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{2} + \left(1-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5} + \left(2-\frac{3}{5}\right)^2\cdot 0 = \frac{6}{25}, \\ \operatorname{Var}(X|2) &= (0-0)^2\cdot 1 + (1-0)^2\cdot 0 + (2-0)^2\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Huomaa, että $E(X|Y=y)$ on y:n funktio, eli $E(X|Y=y) = h(y)$. Merkitään $E(X|Y) = h(Y)$, missä siis $E(X|Y)$ on satunnaismuuttuja, joka saa arvoja $E(X|Y=y)$, $y\in S_Y$. Voimme nyt laskea satunnaismuuttujan $E(X|Y)$ odotusarvon, joka on $E(X)$. Monissa sovelluksissa odotusarvon laskeminen on luontevinta ehdollistamisen kautta.

Lause 7.4 *Olkoot X ja Y mitkä tahansa kaksi satunnaismuuttujaa, joilla on odotusarvo. Silloin $E[E(X|Y)] = E(X)$.*

Todistus. Todistetaan tulos erikseen diskreeteille ja jatkuville satunnaismuuttujille.

Diskreettit satunnaisimuuttujat. Odotusarvon määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} E[E(X \mid Y)] &= \sum_y E(X \mid Y = y) f_Y(y) \\ &= \sum_y \sum_x x \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y) \\ &= \sum_y \sum_x x f(x,y) \\ &= \sum_x x \sum_y f(x,y) \\ &= \sum_x x f_X(x) = E(X), \end{aligned}$$

missä $\sum_y f(x,y) = f_X(x)$ on X:n reunajakauma.

Jatkuvat satunnaisimuuttujat. Määritelmän mukaan

$$E(Y) = \iint y f(x,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int \left[\int y f(y \mid x)\, \mathrm{d}y \right] f_X(x)\, \mathrm{d}x, \tag{7.1.14}$$

missä $f(y \mid x)$ on Y:n ehdollisen jakauman tiheysfunktio ehdolla $X = x$ ja $f_X(x)$ on X:n reunajakauman tiheysfunktio. Integrointi tehdään yli (X, Y):n arvoavaruuden. Koska sisempi integraali luasekkeessa (7.1.14) on ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid x)$, niin odotusarvo (7.1.14) voidaan kirjoittaa muodossa

$$E(Y) = \int E(Y \mid x) f_X(x)\, \mathrm{d}x = E[E(Y \mid X)],$$

niin kuin lauseessa väitetään. □

Ehdollinen varianssi

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y = y) &= E[(X - E(X \mid Y = y))^2 \mid Y = y] \\ &= E(X^2 \mid Y = y) - [E(X \mid Y = y)]^2 \end{aligned}$$

määriteltiin alaluvussa 7.1.1 (ks. identiteetti (7.1.13)). Ehdollinen varianssi $Var(X \mid Y)$ on satunnaismuuttuja, joka saa arvoja $Var(X \mid Y = y)$. Koska

$$Var(X \mid Y) = E(X^2 \mid Y) - [E(X \mid Y)]^2,$$

niin

$$\begin{aligned} E[Var(X \mid Y)] &= E[E(X^2 \mid Y)] - E[E(X \mid Y)]^2 \\ &= E(X^2) - E[E(X \mid Y)]^2. \end{aligned} \tag{7.1.15}$$

Lauseen 7.4 mukaan $E[E(X \mid Y)] = E(X)$ ja $E[E(X^2 \mid Y)] = E(X^2)$, joten

$$Var[E(X \mid Y)] = E[E(X \mid Y)]^2 - [E(X)]^2. \tag{7.1.16}$$

Laskemalla yhtälöt (7.1.15) ja (7.1.16) puolittain yhteen, saadaan seuraavassa lauseessa esitettävä tulos.

Lause 7.5 *Satunnaismuutujille X ja Y pitää paikkansa identiteetti*

$$Var(X) = E[Var(X \mid Y)] + Var[E(X \mid Y)],$$

jos odotusarvot ovat olemassa.

Todistus. Varianssin määritelmän mukaan

$$\mathrm{Var}(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = E\big([Y - E(Y \mid X) + E(Y \mid X) - E(Y)]^2\big),$$

missä viimeinen yhtäsuuruus on saatu lisäämällä ja vähentämällä $E(Y \mid X)$. Korottamalla lauseke neliöön ja ottamalla odotusarvot saadaan

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) = {}& E\big([Y - E(Y \mid X)]^2\big) + E\big([(Y \mid X) - E(Y)]^2\big) \\ &+ 2\,E\big([Y - E(Y \mid X)]\,E[(Y \mid X) - E(Y)]\big).\end{aligned} \tag{7.1.17}$$

Lausekkeen (7.1.17) viimeinen termi on nolla, mikä voidaan osoittaa laskemalla merkitytyt odotusarvot. Yhtälön (7.1.17) oikean puolen ensimmäinen termi voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{aligned}E\big([Y - E(Y \mid X)]^2\big) &= E\big(E[Y - E(Y \mid X)]^2 \mid X\big) \\ &= E[\mathrm{Var}(Y \mid X)]\end{aligned}$$

ja toinen termi muodossa

$$E\big([E(Y \mid X) - E(Y)]^2\big) = \mathrm{Var}[E(Y \mid X)],$$

joten identiteetti (**??**) pitää paikkansa. □

7.1.3 Hierarkkiset mallit ja yhdistetyt jakaumat

Tarkastellaan aluksi esimerkkinä tietyn laitteen, esimerkiksi kopiokoneen, rikkoontumista. Oletetaan, että rikkoontumisten lukumäärä X vuodessa noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla λ. Kun laite on rikkoontunut,sen korjaamiseen tarvittava aika noudattaa eksponettijakaumaa keskiarvolla $\theta > 0$. Olkoon Y_i aika, joka tarvitaan i. rikkoontumisen korjaamiseen. Oletetaan lisäksi, että korjausajat eri kerroilla ovat riippumattomat. Jos vuodessa sattuu $X = x$ rikkoontumista, niin kokonaiskorjausaika on

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_x.$$

Silloin

$$E(Y \mid x) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_x) = x\theta$$

ja

$$\mathrm{Var}(Y \mid x) = \mathrm{Var}(Y_1) + \mathrm{Var}(Y_2) + \cdots + \mathrm{Var}(Y_x) = x\theta^2.$$

Edellä lasketut keskiarvo ja varianssi ovat siis ehdollisia ehdolla $X = x$. Ehdollinen keskiarvo ja varianssi

$$\mu(x) = E(Y \mid x) = x\theta \qquad \text{ja} \qquad \sigma^2(x) = \mathrm{Var}(Y \mid x) = x\theta^2$$

ovat x:n funktioita. Koska $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ on satunnaismuuttuja, niin myös

$$\mu(X) = E(Y \mid X) = X\theta \qquad \text{ja} \qquad \sigma^2(X) = \mathrm{Var}(Y \mid X) = X\theta^2$$

ovat satunnaismuuttujia. Silloin

$$\begin{aligned} E[\mu(X)] &= E[E(Y \mid X)] = \theta\, E(X) = \theta\lambda, \\ E[\sigma^2(X)] &= E[\mathrm{Var}(Y \mid X)] = \theta^2\, E(X) = \theta^2\lambda, \\ \mathrm{Var}[\mu(X)] &= \mathrm{Var}[E(Y \mid X)] = \theta\, \mathrm{Var}(X) = \theta\lambda. \end{aligned}$$

Määritimme siis edellä kaksinkertaisen odotusarvon $E[E(Y \mid X)]$, missä sisimmäinen odotusarvo on otettu Y:n suhteen ja ulompi X:n suhteen.

Esitämme nyt kaksinkertaisia odotusarvoja koskevan lauseen, joka usein helpottaa huomattavasti odotusarvojen laskemista.

Voimme soveltaa nyt Lausetta 7.4 laitteen rikkoontumisten vaatimaa korjausaikaa koskevaan esimerkkiin. Kokonaiskorjausaika vuodessa on Y ja sen keskiarvo on Lauseen 7.4 mukaan

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[E(Y \mid X)] \\ &= E(\theta X) = \theta\, E(X) = \theta\lambda. \end{aligned}$$

Tälläinen sovellus on selvintä ajatella kaksitasoisena hierarkisena mallina, missä 1. vaiheessa sattuvat rikkoontumiset Poissonin jakauman mukaan ja sitten 2. vaiheessa tarvittavat korjausajat jakaantuvat eksponenttijakauman mukaan. Huomaa, että kokonaiskorjausajan Y keskiarvoparametri on nyt satunnaismuuttuja θX, missä X noudattaa Poissonin jakaumaa. Siksi Y:n jakaumaa on perusteltua kutsua yhdistetyksi jakaumaksi, koska siinä yhdistyvät parametrin Poissonin jakauma ja korjausajan eksponenttijakauama. Odotusarvoa $E(Y)$ laskettaessa on yksinkertaisinta laskea ensin ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid X)$ ja sitten näiden ehdollisten odotusarvojen odotusarvo. Silloin laskennassa ei tarvita Y:n reunajakaummaa. Lopputulos on kuitenkin Lauseen **??** mukaan $E(Y)$.

7.1.4 Kaksiulotteinen Bernoullin jakauma

Bernoullin jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ on eräs yksinkertaisimpia ajateltavissa olevia satunnaismuuttujia. Sen todennäköisyysfunktio on

$$f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x \in \{0,1\},$$

kun $0 \le p \le 1$. Bernoullin jakauma on binomijakauman erikoistapaus siten, että $X \sim \mathrm{Bin}(1,p)$.

Kaksiulotteista Bernoullin jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja (X,Y) voi saada arvot $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Sen todennäköisyysfunktio on

$$f(x,y) = p_{xy}, \qquad x \in \{0,1\} \quad \text{ja} \quad y \in \{0,1\}, \tag{7.1.18}$$

missä $p_{00}+p_{01}+p_{10}+p_{11} = 1$. Todennäköisyysfunktio voidaan esittää myös muodossa

$$f(x,y) = p_{00}^{(1-x)(1-y)} p_{01}^{(1-x)y} p_{10}^{x(1-y)} p_{11}^{xy},$$

kun $x \in \{0,1\}$ ja $y \in \{0,1\}$; muualla $f(x,y) = 0$. Todennäköisyydet $P(X = x, Y = y) = p_{xy}$ on esitetty Taulukossa 7.1

Taulukko 7.1. Kaksiulotteisen Bernoullin jakauman todennäköisyysfunktio.

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$f_X(x)$
$x=0$	p_{00}	p_{01}	$1-p_1$
$x=1$	p_{10}	p_{11}	p_1
$f_Y(y)$	$1-p_2$	p_2	1

”Reunatodennäköisyydet” määritellään $p_{00}+p_{01} = p_1$ ja $p_{00}+p_{10} = p_2$. On helppo havaita, että $X \sim \mathrm{Ber}(p_1)$ ja $Y \sim \mathrm{Ber}(p_2)$. Näiden reunajakaumien todennäköisyysfunktiot ovat siis

$$f_X(x) = p_1^x(1-p_1)^{1-x}, \qquad x \in \{0,1\}$$

ja

$$f_Y(y) = p_2^y(1-p_2)^{1-y}, \qquad y \in \{0,1\}.$$

Nyt esimerkiksi Y:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $X = 1$ on

$$f_2(y \mid 1) = \frac{p_{1y}}{p_1}, \qquad y \in \{0,1\} \tag{7.1.19}$$

kun $p_1 > 0$. Satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma ehdolla $X = 1$ on siis $\mathrm{Ber}(p_{11}/p_1)$. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat täsmälleen silloin, kun $P(X = x,\, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$ kaikilla $x \in \{0,1\}$ ja $y \in \{0,1\}$.

Koska $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$, niin kaksiulotteinen Bernoullin jakauma voidaan luonnehtia kolmella parametrilla. Jakauman kolme "luonnollista" parametria ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= E(X) = P(X = 1), \\ p_2 &= E(Y) = P(Y = 1), \\ p_{11} &= E(XY) = P(X = 1, Y = 1). \end{aligned}$$

Kun (X, Y) noudattaa kaksiulotteista Bernoullin jakaumaa parametrein p_1, p_2 ja p_{11}, niin merkitään $(X, Y) \sim \mathrm{Ber}(p_1, p_2, p_{11})$.

7.1.5 Satunnaismuuttujien funktion jakauma

Usein tarvitaan satunnaismuuttujien X ja Y jonkin funktion $h(X, Y)$ jakaumaa. Funktio $h(X, Y)$ voi olla esimerkiksi muotoa $X + Y$, XY, $X^2 + Y^2$ jne. Jos h on jokin reaaliarvoinen funktio $h(x, y)$, voimme määritellä uuden satunnaismuuttujan $Z = h(X, Y)$. Olkoon satunnaisvektorin (X, Y) arvoalue S. Merkitään

$$A_z = \{\, (x, y) \in S \mid h(x, y) = z \,\}.$$

Silloin todennäköisyys $P(Z = z)$ voidaan laskea seuraavasti:

$$P(Z = z) = \sum_{(x,y) \in A_z} f(x, y).$$

Lasketaan siis yhteen todennäköisyydet $f(x, y)$ kaikkissa pisteissa (x, y), jotka toteuttavat ehdon $h(x, y) = z$. Tällä tavalla voidaan johtaa Z:n todennäköisyysfunktio.

Esimerkki 7.9 Oletetaan, että satunnaisvektorin (X, Y) (Esimerkki 7.1) todennäköisyysfunktio on

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{12}, \qquad (x, y) \in S,$$

missä $S = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$. Määritellään kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja

$$Z = h(X, Y) = XY.$$

Silloin Z:n arvojen joukko on $S_z = \{0, 1\}$, ja vastaavasti

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\, (x, y) \mid xy = 1 \,\} = \{(1, 1)\}, \\ A_0 &= \{\, (x, y) \mid xy = 0 \,\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)\}. \end{aligned}$$

Nyt siis

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P\big((X, Y) \in A_0\big) = \frac{3}{4}, \\ P(Z = 1) &= P\big((X, Y) \in A_1\big) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

joten $Z \sim \mathrm{Ber}\big(\frac{1}{4}\big)$. □

7.2 Satunnaismuuttujien funktion odotusarvo

Olkoot X ja Y diskreetit satunnaismuuttujat, joiden yhteinen todennäköisyysfunktio $f(x,y)$ on on määritelty arvoavaruudessa S. Olkoon $h(X,Y)$ satunnaismuuttujien X ja Y reaaliarvoinen funktio. Silloin

$$E[h(X,Y)] = \sum_{(x,y)\in S} h(x,y)f(x,y)$$

on satunnaismuuttujan $h(X,Y)$ odotusarvo, mikäli summa on olemassa.

Huomaa, että odotusarvon $E[h(X,Y)]$ olemassaolo tarkoittaa sitä, että summa

$$\sum_{(x,y)\in S} h(x,y)f(x,y)$$

suppenee itseisesti eli summa

$$\sum_{(x,y)\in S} |h(x,y)|f(x,y)$$

suppenee ja on äärellinen. Tästä seuraa, että $E[h(X,Y)]$ on olemassa. Funktio $V = h(X,Y)$ on satunnaismuuttuja, jonka todennäköisyysfunktio $g(v)$ on määritelty arvoavaruudessa $S_v = \{\, v \mid v = h(x,y),\ (x,y) \in S \,\}$. Silloin

$$E[h(X,Y)] = E(V) = \sum_{v\in S_v} vg(v).$$

7.2.1 Momentit

Monilla odotusarvoilla on omat nimensä, koska niillä on tärkeä rooli jakaumateoriassa. Olkoot X_1 ja X_2 diskreetit satunnaismuuttujat, joiden yhteisjakauman todennäköisyysfunktio $f(x_1,x_2)$ on on määritelty arvoavaruudessa S. Olkoon $h(X_1,X_2)$ satunnaismuuttujien X_1 ja X_2 reaaliarvoinen funktio. Määritellään esimerkiksi seuraavat odotusarvot:

1. Jos $h(X_1,X_2) = X_i$, niin

   $$E[h(X_1,X_2)] = E(X_i) = \mu_i$$

   on X_i:n *odotusarvo*, $i = 1, 2$.

2. Jos $h(X_1,X_2) = (X_i - \mu_i)^2$, niin

   $$E[h(X_1,X_2)] = E[(X_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2$$

   on X_i:n *varianssi*, $i = 1, 2$.

3. Jos $h(X_1, X_2) = (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)$, niin

$$E[h(X_1, X_2)] = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = \sigma_{12}$$

on X_1:n ja X_2:n *kovarianssi.*

Odotusarvo μ_i ja varianssi σ_i^2 voidaan laskea joko yhteisjakauman todennäköisyysfunktion $f(x_1, x_2)$ tai reunajakauman todennäköisyysfunktion $f_i(x_i)$ avulla.

Vastaavalla tavalla voidaan määritellä kaikkien kertalukujen momentit: Olkoon r positiivinen kokonaisluku.

1. Jos $h(X_1, X_2) = X_i^r$, niin

$$E[h(X_1, X_2)] = E(X_i^r)$$

on X_i:n *r. momentti,* $i = 1, 2$.

2. Jos $h(X_1, X_2) = (X_i - \mu_i)^r$, niin

$$E[h(X_1, X_2)] = E[(X_i - \mu_i)^r]$$

on X_i:n *r. keskusmomentti,* $i = 1, 2$.

3. Jos $h(X_1, X_2) = X_1^r X_2^s$, niin

$$E[h(X_1, X_2)] = E(X_1^r X_2^s)$$

on X_1:n ja X_2:n kertalukua $r + s$ oleva *yhteismomentti.*

Esimerkiksi kovarianssin laskemisessa tarvitaan X_1:n ja X_2:n yhteismomentti $E(X_1 X_2)$.

7.2.2 Satunnaisvektorin momenttifunktio

Satunnaisvektorin (X, Y) yhteisjakauman momenttifunktio on

$$\begin{aligned} M(t, s) &= E[\exp(tX + sY)] \\ &= \sum_{x_i \in S_X} \sum_{y_j \in S_Y} \exp(tx_i + sy_j) f(x_i, y_j), \end{aligned}$$

missä S_X on X:n ja S_Y on Y:n arvoalue. mikäli odotusarvo on olemassa nollan ympäristössä. Silloin on siis olemassa sellainen positiiviluku $a > 0$, että odotusarvo $E[\exp(tX + sY)]$ on olemassa kaikilla $(t, s) \in \{\, (t, s) \mid t^2 + s^2 < a \,\}$ jollain $a > 0$. Edellä on käytetty merkintää $\exp(tX + sY) = \mathrm{e}^{tX+sY}$.

Jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman eli jatkuvan satunnaisvektorin (X, Y) jakauman momenttifunktio määritellään samalla tavalla kuin diskreetissä tapauksessa. Olkoon (X, Y) jatkuva satunnaisvektori ja

$tX + sY$ satunnaismuuttujien X ja Y lineaarinen yhdiste, missä $t, s \in \mathbb{R}$. Satunnaisvektorin (X, Y) jakauman momenttifunktio on

$$M(t, s) = E\big(\mathrm{e}^{tX+sY}\big).$$

Jatkuvien satunnaismuuttujien tapauksessa odotusarvon lauseke on muotoa

$$E\big(\mathrm{e}^{tX+sY}\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx+sy} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Merkitään

$$\begin{aligned} M_t(t, s) &= \frac{\partial M(t, s)}{\partial t}, \\ M_{tt}(t, s) &= \frac{\partial^2 M(t, s)}{\partial t^2}, \\ M_{ts}(t, s) &= \frac{\partial^2 M(t, s)}{\partial t\,\partial s}, \end{aligned}$$

missä $M_t(t, s)$ on M:n osittaisderivaatta t:n suhteen, $M_{tt}(t, s)$ on M:n 2. osittaisderivaatta t:n suhteen ja $M_{ts}(t, s)$ on osittaisderivaatta t:n ja s:n suhteen. Esitämme nyt seuraavassa lauseessa, miten momenttifunktio generoi satunnaisvektorin momentit.

Lause 7.6 *Oletetaan, että satunnaisvektorilla* (X, Y) *on momenttifunktio. Silloin* $E(X)$, $E(X^2)$, $E(Y), E(Y^2)$ *ja* $E(XY)$ *ovat äärelliset ja*

$$\begin{aligned} &E(X) = M_t(0, 0), \qquad E(X^2) = M_{tt}(0, 0), \qquad E(XY) = M_{ts}(0, 0) \\ &E(Y) = M_s(0, 0), \qquad E(Y^2) = M_{ss}(0, 0). \end{aligned}$$

Esimerkiksi X:n odotusarvo saadaan derivoimalla ensin momenttifunktio t:n suhteen ja sijoittamalla sitten derivaatan lausekkeeseen $t = 0$ ja $s = 0$. Sekamomentti $E(XY)$ saadaan määrittämällä toisen kertaluvun osittaisderivaatta $M_{ts}(t, s)$ (derivoidaan momenttifunktio s:n ja t:n suhteen) ja laskemalla osottaisderivaatan arvo $M_{st}(0, 0)$ pisteessä $(t, s) = (0, 0)$.

Esimerkki 7.10 Jos Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomat ja noudattavat standardimuotoista normaalijakaumaa, niin (Z_1, Z_2) noudattaa kaksiulotteista standardimuotoista normaalijakaumaa. (Z_1, Z_2):n momenttifunktio on

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= E\big(\mathrm{e}^{t_1 Z_1 + t_2 Z_2}\big) = E(\mathrm{e}^{t_1 Z_1})\,E(\mathrm{e}^{t_2 Z_2}) \\ &= \mathrm{e}^{t_1^2/2}\mathrm{e}^{t_2^2/2} = \mathrm{e}^{(t_1^2+t_2^2)/2}. \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa $M_1(t_1, t_2) = t_1\mathrm{e}^{(t_1^2+t_2^2)/2}$, joten $E(X_1) = M_1(0, 0) = 0$. Vastaavasti $M_{11} = \mathrm{e}^{(t_1^2+t_2^2)/2} + t_1\mathrm{e}^{(t_1^2+t_2^2)/2}$ ja $E(X_1^2) = M_{11}(0, 0) = 1$. □

Huomattakoon, että myös satunnaisvektoreiden tapauksessa pätee momenttifunktioden yksikäsitteisyyttä koskeva lause (vrt. Lause 4.10). Jos siis satunnaisvektoreilla (X_1, X_2) ja (Y_1, Y_2) on sama momenttifunktio, niin niillä on sama jakauma. Reunajakaumien momenttifunktiot saadaan kätevästi yhteisjakuman momenttifunktiosta.

Lause 7.7 *Oletetaan, että satunnaisvektorin (X, Y) momenttifunktio on $M(s, t)$ sekä X:n ja Y:n momenttifunktiot vastaavasti $M_X(s)$ ja $M_Y(t)$.*

1. *Silloin*
$$M_X(s) = M(s, 0) \qquad ja \qquad M_Y(t) = M(0, t).$$

2. *X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain jos*
$$M(s, t) = M_X(s)M_Y(t).$$

7.3 Riippumattomat satunnaismuuttujat

Riippumattomuuden määritelmän mukaan tapahtumat $\{X = x\}$ ja $\{Y = y\}$ ovat riippumattomat jos ja vain jos $P(X = x,\ Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y)$ eli

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \tag{7.3.1}$$

missä $f(x, y)$ on X:n ja Y:n yhteisjakauman todennäköisyysfunktio, $f_X(x)$ on X:n ja $f_Y(y)$ Y:n todennäköisyysfunktio. Satunnaismuuttujat *X ja Y ovat riippumattomat* jos ja vain jos yhtäsuuruus (7.3.1) pitää paikkansa kaikilla $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$, missä S_X on X:n ja S_Y on Y:n arvojoukko. Voidaan helposti osoittaa, että X ja Y ovat riippumattomat, jos ja vain jos

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \tag{7.3.2}$$

kaikilla $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$, missä $F_X(x)$ on X:n ja $F_Y(y)$ Y:n kertymäfunktio (reunakertymäfunktio).

Satunnaismuuttujien X ja Y ovat riippumattomuus voidaan luonnehtia myös ehdollisten jakaumien avulla. Jos Määritelmässä **??**

$$f(y \mid x) = f_Y(y)$$

kaikilla $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$, kun $f_X(x) \neq 0$, niin X ja Y ovat riippumattomat. Tämä tarkoittaa sitä, että tieto X:n arvosta ei vaikuta Y:n todennäköisyyteen. Vastaavasti pitää paikkansa, että X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain jos X:n ehdollinen todennäköisyysfunktio ehdolla $Y = y$ ei riipu y:stä.

Olkoot Y_1, Y_2, ..., Y_n jossain otosavaruudessa määritellyt diskreetit satunnaismuuttujat. Muuttujien Y_1, Y_2, ..., Y_n *yhteisjakauman todennäköisyysfunktio* on

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_n = y_n).$$

Muuttujat Y_1, Y_2, ..., Y_n ovat riippumattomat, jos

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_1(y_1) f_2(y_2) \cdots f_n(y_n) \tag{7.3.3}$$

kaikilla $y_i \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, missä $f_i(y_i)$ on Y_i:n todennäköisyysfunktio ja S_i on Y_i:n arvoavaruus.

7.3.1 Riippumattomat kokeet

Olkoot $\mathcal{E}_1$ ja $\mathcal{E}_2$ riippumattomat satunnaiskokeet. Oletetaan, että satunnaismuuttujan X arvo määräytyy vain satunnaiskokeen $\mathcal{E}_1$ tuloksen ja Y:n arvo vain satunnaiskokeen $\mathcal{E}_2$ tuloksen perusteella. Silloin tapahtumat $\{X = x\}$ ja $\{Y = y\}$ määräytyvät eri satunnaiskokeista, jotka ovat riippumattomat (katso alaluku 4.7 ja määritelmä (4.7.1)). Siksi tapahtumat $\{X = x\}$ ja $\{Y = y\}$ ovat riippumattomat. Koska riippumattomuus pätee kaikilla mahdollisilla x:n ja y:n arvoilla, niin X ja Y ovat riippumattomat. *Jos satunnaismuuttujien arvot määräytyvät eri satunnaiskokeista, jotka ovat riippumattomat, niin satunnaismuuttujat ovat riippumattomat.*

Tehdään esimerkiksi Bernoullin toistokoe, jossa on $r + s$ toistoa ja onnistumistodennäköisyys p. Olkoon X onnistumisten lukumäärä r:ssä ensimmäisessä kokeessa ja Y onnistumisten lukumäärä s:ssä viimeisessä kokeessa. Koska X ja Y riippuvat eri kokeista, jotka ovat riippumattomat, niin X ja Y ovat riippumattomat. Silloin (7.3.1):n mukaan

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \binom{r}{x}\binom{s}{y} p^{x+y}(1-p)^{r+s-x-y},$$

missä $x = 0, 1, \ldots, r$ ja $y = 0, 1, \ldots, s$.

7.3.2 Samoin jakautuneet riippumattomat (SJR) satunnaismuuttujat

Riippumattomia satunnaismuuttujia Y_1, Y_2, ..., Y_n, joista jokainen noudattaa samaa jakaumaa, sanotaan samoin jakautuneiksi riippumattomiksi (sjr) satunnaismuuttujiksi. Silloin puhutaan usein lyhyesti sjr satunnaismuuttujista. Vastaava englanninkielinen termi on iid (independent, identically distributed).

Jos esimerkiksi $Y_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, niin

$$f_1(y) = f_2(y) = \cdots = f_n(y) = \frac{\lambda^y \mathrm{e}^{-\lambda}}{y!}.$$

Silloin (7.3.3):n nojalla

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \ldots, y_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_i(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{y_i}\mathrm{e}^{-\lambda}}{y_i!} \\ &= \frac{1}{y_1!\, y_2! \ldots y_n!} \lambda^{y} \mathrm{e}^{-n\lambda}, \end{aligned}$$

missä $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

7.3.3 Riippumattomien satunnaismuuttujien funktio

Olkoot X ja Y riippumattomat satunnaismuuttujat. Silloin

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{kaikilla } x, y \in S,$$

missä S on satunnaisvektorin (X,Y) arvoavaruus. Määritellään nyt satunnaismuuttujat $U = g(X)$ ja $V = h(Y)$, missä $g(\cdot)$ riippuu vain X:stä ja $h(\cdot)$ vain Y:stä. Silloin Lauseen 4.5 mukaan U ja V ovat riippumattomat.

Väite todistettiin tarkastelemalla U:n ja V:n mielivaltaisten arvojen u ja v todennäköisyyttä. Olkoon $A_u = \{\, x \in S_X \mid g(x) = u \,\}$ ja $B_v = \{\, y \in S_Y \mid g(y) = v \,\}$. Koska kaikilla U:n ja V:n arvoilla u ja v

$$\begin{aligned} P(U = u, V = v) & \\ &= P(X \in A_u, Y \in B_v) \\ &= P(X \in A_u)\, P(Y \in B_v) \qquad (X \text{ ja } Y \text{ riippumattomat}) \\ &= P(U = u)\, P(V = v), \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

niin U ja V ovat riippumattomat. Kun sijoitetaan identiteettiin (7.3.4)

$$P(U = u, V = v) = \sum_{x \in A_u} \sum_{y \in B_v} f(x,y),$$

$$P(U = u) = \sum_{x \in A_u} f_X(x) \qquad \text{ja} \qquad P(V = v) = \sum_{y \in B_v} f_Y(y),$$

niin saadaan

$$\sum_{x \in A_u} \sum_{y \in B_v} f(x,y) = \Big(\sum_{x \in A_u} f_X(x)\Big)\Big(\sum_{y \in B_v} f_Y(y)\Big).$$

7.4 Multinomijakauma ja moniulotteinen hypergeometrinen jakauma

Binomijakauma ja multinomijakauma ovat keskeisen tärkeitä tilastollisissa sovelluksissa, koska niitä tarvitaan esimerkiksi riippumattomien koetoistojen tulosten frekvenssijakaumien käsittelyssä. Alaluvussa 4.7 esitettiin, miten binomijakauma saadaan Bernoullin kokeiden avulla. Kun toistetaan kokeita, joissa on useampia kuin kaksi tulosvaihtoehtoa, tulosten frekvenssijakauma voidaan kuvata multinomijakauman avulla. Laajennetaan ensin binomijakauma *trinomijakaumaksi.*

Tarkastellaan koetta, jossa on kolme toisensa poissulkevaa tulosvaihtoehtoa. Esimerkiksi tuotantoprosessissa syntyvä tuote luokitellaan yhteen ja vain yhteen seuraavista kategorioista: ensiluokkainen (1), sekunda (2) tai viallinen (3). Olkoot ensiluokkaisen, sekundan ja viallisen todennäköisyydet vastaavasti p_1, p_2 ja $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Valmistetaan n tuotetta. Olkoon X_1 = ensiluokkaisten lukumäärä, X_2 = sekundatuotteiden lukumäärä ja $X_3 = n - X_1 - X_2$ = viallisten lukumäärä tuote-erässä. Jos x_1 ja x_2 ovat sellaiset epänegatiiviset kokonaisluvut, että $x_1 + x_2 \leq n$, niin todennäköisyys saada x_1 ensiluokkaista, x_2 sekundaa ja $n - x_1 - x_2$ viallista jossain annetussa järjestyksessä on

$$p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x2}.$$

Sellaisia n:n tuotteen järjestyksiä, joissa on x_1 ensiluokkaista, x_2 sekundaa ja $n - x_1 - x_2$ viallista, on

$$\binom{n}{x_1}\binom{n - x_1}{x_2} = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,(n - x_1 - x_2)!}$$

kappaletta. Siksi *trinomijakauman todennäköisyysfunktio* on

$$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,(n - x_1 - x_2)!}\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}, \tag{7.4.1}$$

missä $f(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$. Kun (X_1, X_2) noudattaa trinomijakaumaa parametrein n, p_1 ja p_2, merkitään

$$(X_1, X_2) \sim \mathrm{Tri}(n, p_1, p_2).$$

On helppo todeta, että $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n, p_1)$ (X_1:n reunajakauma) ja $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n, p_2)$.

Multinomijakauma voidaan johtaa samalla periaatteella kuin trinomijakauma. Toistetaan n kertaa koe, jossa on k toisensa poissulkevaa tulosvaihtoehtoa. Merkitään tulosvaihtoehtoja $1, 2, \ldots, k$ ja olkoon p_i = tuloksen i todennäköisyys ja X_i on tuloksen i lukumäärä n:n kokeen sarjassa. Silloin k-ulotteisen satunnaisvektorin $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ arvoalue on

$$S = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid 0 \leq x_i \leq n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \,\}.$$

X_i:t ovat siis epänegatiivisia kokonaislukuarvoisia satunnaismuuttujia, joiden summa on n. Satunnaisvektori $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ noudattaa *k-ulotteista multinomijakaumaa* parametrein n ja $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, jota merkitään $\mathrm{Mult}(n, \boldsymbol{p})$. Multinomijakauman todennäköisyysfunktio on

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \binom{n}{x_1\ x_2\ \ldots\ x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}, \tag{7.4.2}$$

missä $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$ ja $\binom{n}{x_1\ x_2\ \ldots\ x_k} = \frac{n!}{x_1!\,x_2! \cdots x_k!}$. Multinomilauseen 2.8 nojalla voidaan helposti osoittaa, että todennäköisyyksien (7.4.2) summa yli arvoalueen S on 1, joten kyseinen funktio on todellakin todennäköisyysfunktio. Multinomijakaumassa jokaisen X_i:n *reunajakauma on binomijakauma,* eli $X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Esitetään nyt multinomijakaumaa koskevat perustulokset lauseen muodossa.

Lause 7.8 *1. Funktio (7.4.2) on multinomijakauman todennäköisyysfunktio kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n ja kaikilla sellaisilla $p_1, \ldots, p_k$, että $0 \le p_i \le 1$ ja $p_1 + \cdots + p_k = 1$.*

2. Jos $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{Mult}(n, \boldsymbol{p})$, niin

$$X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p_i) \qquad \text{ja} \qquad (X_i, X_j) \sim \mathrm{Tri}(n, p_i, p_j),$$

3.

$$E(X_i) = np_i, \qquad \mathrm{Var}(X_i) = np_i(1-p_i), \qquad \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j,$$
$$M(t) = E[\exp(t_1X_1 + \cdots + t_kX_k)] = \left(p_1\mathrm{e}^{t_1} + \cdots + p_k\mathrm{e}^{t_k}\right)^n.$$

Multinomijakauma liittyy otantaan palauttaen. Olkoon uurnassa erivärisiä palloja yhteensä N, värien lukumäärä on k ja väriä i olevia palloja on N_i kappaletta ($i = 1, 2, \ldots, k$) ja $N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$. Otannassa palauttaen todennäköisyys p_i saada väri i on N_i/N jokaisessa nostossa. Valitaan uurnasta n palloa palauttaen ja olkoon X_i väriä i olevien pallojen lukumäärä otoksessa. Silloin satunnaismuuttujien X_1, X_2, ..., X_k yhteisjakauma on multinomijakauma.

Otannassa palauttamatta uurnan sisältö muuttuu ja siten myös valintatodennäköisyydet muuttuvat valintaprosessin aikana. Satunnaismuuttujien X_1, X_2, ..., X_k yhteisjakauman johtamiseksi meidän on yleistettävä alaluvussa 2.7.1 esitetty hypergeometrinen jakauma.

Olkoon x_i väriä i ($1 \le i \le k$) olevien pallojen lukumäärä otannassa palauttamatta. Millä todennäköisyydellä saadaan otos, jossa eri väriä olevien lukumäärät ovat $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$? Koska uurnassa on N_i kappaletta väriä i, niin $0 \le x_i \le N_i$. Otoskoko on n ja $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$. Nyt väriä 1 olevat x_1 palloa voidaan valita $\binom{N_1}{x_1}$ tavalla, väriä 2 olevat $\binom{N_2}{x_2}$ tavalla ja lopulta väriä k olevat pallot $\binom{N_k}{x_k}$ tavalla. Suotuisten otosten lukumäärä on tuloperiaatteen nojalla

$$\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\cdots\binom{N_k}{x_k}.$$

Koska kaikkien mahdollisten n:n kokoisten otosten lukumäärä on $\binom{N}{n}$, niin todennäköisyys saada lukumäärät $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ erivärisiä palloja on

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\cdots\binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}, \tag{7.4.3}$$

missä $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Tämä on *moniulotteisen hypergeometrisen jakauman* todennäköisyysfunktio.

7.5 Kahden muuttujan normaalijakauma

7.5.1 Standardimuoto

Oletetaan, että satunnaismuuttujat Z ja V ovat riippumattomat ja noudattavat standardimuotoista normaalijakaumaa. Silloin Z:n ja V:n riippumattomuuden nojalla satunnaisvektorin (Z, V) yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f_{Z,V}(z, v) = f(z)f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-v^2/2} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(z^2+v^2)/2}. \tag{7.5.1}$$

Sanomme, että satunnaisvektori (Z, V) noudattaa kaksiulotteista standardimuotoista normaalijakaumaa ja funktio (7.5.1) on tämän jakauman tiheysfunktio. Merkitään $(Z, V) \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$, missä $\mathbf{0}$ on 2×1-nollavektori eli $\mathbf{0} = (0, 0)^\mathsf{T}$. Merkintä $(0, 0)^\mathsf{T}$ tarkoittaa vektorin $(0, 0)$ transponointia, joka muuntaa vaakavektorin $(0, 0)$ pystytoriksi. Matriisi

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on 2×2-identiteettimatriisi. Yhteisjakauman reunajakaumien keskiarvot ovat $E(Z) = E(V) = 0$ ja varianssit $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(V) = 1$ sekä $\mathrm{Cov}(Z, V) = 0$. Satunnaisvektorin (Z, V) odotusarvovektori on $[E(Z), E(V)]^\mathsf{T} = \mathbf{0}$ ja kovarianssimatriisi

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(Z) & \mathrm{Cov}(Z, V) \\ \mathrm{Cov}(V, Z) & \mathrm{Var}(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Huomaa, että aina $\mathrm{Cov}(Z, V) = \mathrm{Cov}(V, Z)$, joten kovarianssimatriisi on symmetrinen. Voidaan merkitä myös $(Z, V) \sim \mathrm{N}_2(0, 0; 1, 1, 0)$, missä odotusarvot, varianssit ja korrelaatio on annettu sulkeissa.

7.5.2 Korreloivat muuttujat

Oletetaan, että $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ ja $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ ovat riippumattomat. Niiden avulla voidaan konstruoida normaalijakaumaa noudattava satunnaismuuttuja Y siten, että X ja Y korreloivat. Kiertämällä x-akselia kulman θ verran vastapäivään saadaan y-akseli (Kuvio 7.3). Projisoidaan satunnaispiste (X, Z) y-akselille ja merkitään tätä projektiota Y:llä. On helppo todeta geometrisen päättelyn avulla (Kuvio 7.3), että

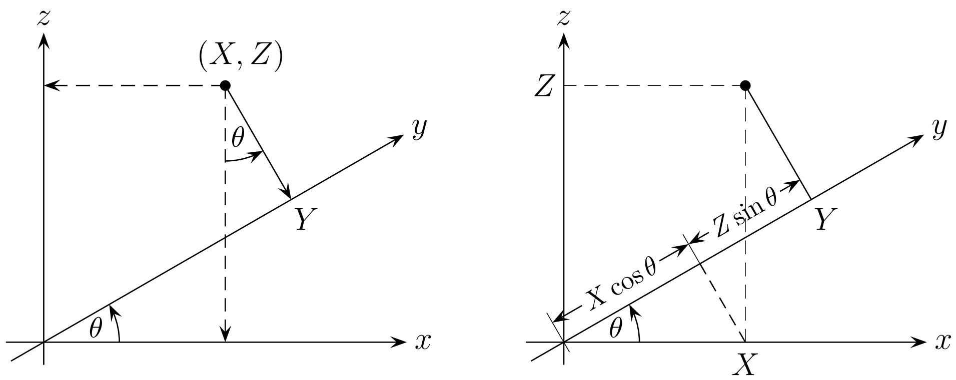
$$Y = X\cos\theta + Z\sin\theta.$$

Satunnaismuuttuja Y saadaan siis X:n ja Z:n lineaarisena muunoksena. Tästä seuraa, että

$$E(Y) = \cos\theta \cdot E(X) + \sin\theta \cdot E(Z) = 0$$

ja

$$\mathrm{Var}(Y) = \cos^2\theta \cdot \mathrm{Var}(X) + \sin^2\theta \cdot \mathrm{Var}(Z) = 1,$$



Kuvio 7.3.

koska $E(X) = E(Z) = 0$ ja $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Z) = 1$. Lauseen 6.4 mukaan $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$. Satunnaisuuttujien X ja Y 2. kertaluvun sekamomentti on

$$\begin{aligned} E(XY) &= E[X(X\cos\theta + Z\sin\theta)] \\ &= \cos\theta \cdot E(X^2) + \sin\theta \cdot E(XZ) \\ &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $E(X^2) = 1$ ja $E(XZ) = E(X)\,E(Z) = 0$. Satunnaisuuttujien X ja Y välinen korrelaatio $\mathrm{Cor}(X,Y) = E(X,Y)$, koska $E(X) = E(Y) = 0$ ja $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$.

7.6 Satunnaisvektoreiden muunnokset

Oletetaan, että jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on f. Olkoon

(7.6.1) $$U = h_1(X,Y); \qquad V = h_2(X,Y)$$

sellainen satunnaisvektorin (X,Y) muunnos, että sillä on käänteismuunnos. Silloin mitä tahansa satunnaisvektorin (U,V) arvoa $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ vastaa yksikäsitteinen satunnaisvektorin (X,Y) arvo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Voimme silloin määritellä käänteiskuvauksen

$$x = g_1(u,v); \qquad y = g_2(u,v).$$

Vektoreiden $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ ja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ välillä on yksi-yksinen vastaavuus. Oletetamme lisäksi, että funktioilla g_1 ja g_2 on jatkuvat osittaisderivaatat. Yksiulotteisen muunnoksen tapauksessa laskettavaa derivaattaa g' vastaa satunnaisvektorien muunnoksen *Jacobin determinantti,* joka on funktioiden g_1 ja g_2 osittaisderivaattojen matriisin determinantti. Jacobin determinanttia kutsutaan muunnoksen *Jakobiaaniksi.*

Muunnoksen (7.6.1) Jakobiaani on

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \tag{7.6.2}$$

missä

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial v},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial g_2(u,v)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial g_2(u,v)}{\partial v}.$$

Jacobin determinanttia merkitään $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$. Oletetaan, että $J \neq 0$, kun $f(x,y) > 0$. Satunnaisvektorin (U,V) yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f_{U,V}(u,v) = f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)|J|. \tag{7.6.3}$$

Satunnaisvektorin (U,V) arvoavaruus $S_{U,V}$ saadaan tarkastelemalla kuvausta (7.6.1), joka kuvaa satunnaisvektorin (X,Y) arvojoukon $S_{X,Y}$ kuvajoukoksi $S_{U,V}$.

Esimerkki 7.11 Olkoot X ja Y jatkuvat satunnaismuuttujat, joiden yhteisjakauman tiheysfunktio on f. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V siten, että

$$U = X + Y; \qquad V = X - Y. \tag{7.6.4}$$

Johdetaan nyt (U,V):n jakauman tiheysfunktio. Muunnoksen (7.6.4) käänteismuunnos on

$$x = g_1(u,v) = \frac{u+v}{2}, \qquad y = g_2(u,v) = \frac{u-v}{2},$$

ja muunnoksen Jakobiaani on

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Satunnaisvektorin (U,V) yhteisjakauman tiheysfunktio on yhtälön (7.6.3) nojalla

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right). \tag{7.6.5}$$

Jos esimerkiksi X ja Y ovat riippumattomat ja noudattavat tasajakaumaa Tas$(0,1)$, niin (X,Y):n yhteisjakauman tiheysfunktio $f(x,y) = 1$, kun $x \in [0,1]$ ja $y \in [0,1]$. Silloin (U,V):n tiheysfunktio on

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le u+v \le 2,\ 0 \le u-v \le 2. \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

□

Yleinen muunnos

Tarkasteltavalla muunnoksella ei tietenkään aina ole käänteismuunnosta. Jos muunnos (7.6.1) ei ole yksi-yksinen eli bijektio, niin sillä ei ole käänteismuunnosta. Jos kuitenkin on olemassa sellainen arvoavaruuden $S_{X,Y}$ ositus yhteispisteettömiin (x, y)-tason osaväleihin A_1, A_2, ..., A_m, että

$$S_{X,Y} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \tag{7.6.6}$$

ja muunnoksella

$$u = h_1(x, y), \qquad v = h_2(x, y)$$

on käänteismuunnos

$$x = g_1(x, y), \qquad y = g_2(x, y)$$

jokaisella osavälillä A_i, $i = 1, 2, \dots, m$, niin kaavaa (7.6.3) voidaan soveltaa kullakin osavälillä erikseen vastaavalla tavalla kuin yhden muuttujan tapauksessa. Määritellään funktiot

$$h_{ki}(x, y) = \begin{cases} h_k(x, y), & \text{kun } (x, y) \in A_i; \\ 0 & \text{muualla,} \end{cases}$$

kun $k = 1, 2$. Silloin $h_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} h_{1i}(x, y)$ ja $h_2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} h_{2i}(x, y)$. Jokaisella muunnoksella

$$u = h_{1i}(x, y), \qquad v = h_{2i}(x, y)$$

on käänteismuunnos välillä A_i, $i = 1, 2, \dots, m$. Merkitään näitä käänteismuunnoksia

$$x = g_{1i}(u, v), \qquad y = g_{2i}(u, v).$$

Satunnaisvektorin (U, V) tiheysfunktio voidaan silloin esittää kaavan (7.6.3) avulla seuraavasti

$$f_{U,V}(u, v) = \sum_{i=1}^{m} f_{X,Y}\big(g_{1i}(u, v), g_{2i}(u, v)\big)|J_i|, \tag{7.6.7}$$

missä J_i on muunnoksen $x = g_{1i}(u, v)$, $y = g_{2i}(u, v)$ Jakobiaani.

Satunnaismuuttujien funktion jakauma

Usein tarkasteltavana on vain yksi satunnaismuuttujien X ja Y funktio $U = h_1(X, Y)$. Funktio $h_1(X, Y)$ voi olla esimerkiksi muotoa $X + Y$, XY, $X^2 + Y^2$ jne. Esitettyä muunnostekniikkaa voidaan edelleen käyttää, jos löydetään sellainen apumuuttuja $V = h_2(X, Y)$, että muunnoksella

$$U = h_1(X, Y), \qquad V = h_2(X, Y)$$

on käänteismuunnos. Muunnoskaavan (7.6.3) avulla saadaan sitten satunnaisvektorin (U, V) yhteisjakauman tiheysfunktio, josta voidaan määrittää U:n reunajakauman tiheysfunktio. Jos esimerkiksi $U = h_1(X, Y) = X + Y$, niin voidaan valita apumuuttuja $V = h_2(X, Y) = X - Y$. Silloin muunnoksella $u = x + y$, $v = x - y$ on käänteismuunnos

$$x = g_1(u, v) = \frac{u+v}{2}, \qquad y = g_2(u, v) = \frac{u-v}{2}$$

ja (U, V):n tiheysfunktio saadaan kaavalla (7.6.3), niinkuin Esimerkissä 7.11 osoitettiin. Kun tästä (U, V):n tiheysfunktiosta "integroidaan v pois", saadaan U:n tiheysfunktio. Jos ollaan kiinnostuneita esimerkiksi satunnaismuuttujan $U = XY$ tiheysfunktiosta, voidaan valita apumuuttuja $V = X$, sillä muunnoksella $u = xy$, $v = x$ on käänteismuunnos. Sitten sovelletaan jälleen edellä kuvattua tekniikkaa. Huomaa, että apumuuttujan valinta ei ole yksikäsitteinen, vaan useilla eri valinnoilla voidaan päästä haluttuun tulokseen.

Tässä yhteydessä on syytä palauttaa mieleen Lause 4.5. Siinä osoitettiin riippumattomille satunnaismuuttujille X ja Y seuraava tulos: Jos $g(X)$ ei riipu Y:stä ja $h(Y)$ ei riipu X:stä, niin silloin satunnaismuuttujat $g(X)$ ja $h(Y)$ ovat riippumattomat. Lause todistettiin diskreettien satunnaismuuttujien tapauksessa, mutta se pitää paikkansa myös jatkuville muuttujille.

Esimerkki 7.12 Jos X ja Y ovat riippumattomat ja noudattavat standardimuotoista normaalijakumaa, niin mitä jakaumaa noudattaa $X + Y$? Määritelään ensin apumuuttuja $V = X - Y$. Kuten esimerkissä 7.11 osoitettiin, muunnoksen $u = x + y$, $v = x - y$ käänteismuunnos on

$$x = g_1(u, v) = \frac{u+v}{2}, \qquad y = g_2(u, v) = \frac{u-v}{2},$$

ja muunnoksen Jakobiaani $J = -\frac{1}{2}$. Yhtälön (7.6.5) perusteella (U, V):n tiheysfunktio on

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \frac{1}{4\pi} \mathrm{e}^{-[(u+v)^2/8 + (u-v)^2/8]} \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)/4} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/4} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathrm{e}^{-v^2/4} \\ &= f_U(u) f_V(v). \end{aligned} \tag{7.6.8}$$

Näemme, että $f_U(u)$ ja $f_V(v)$ ovat kumpikin normaalijakauman $\mathrm{N}(0, 2)$ tiheysfunktioita. Siksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v)\, \mathrm{d}v = f_U(u) \int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\, \mathrm{d}v = f_U(u),$$

joten $U = X + Y \sim \mathrm{N}(0, 2)$. Identiteetistä (7.6.8) seuraa, että $X + Y$ ja $X - Y$ ovat riippumattomat. Havaitsemme myös, että $X - Y \sim \mathrm{N}(0, 2)$. Itse asiassa voidaan todistaa seuraava tulos: Jos X ja Y ovat riippumattomat ja noudattavat samaa jakaumaa F, niin $X+Y$ ja $X-Y$ ovat riippumattomat jos ja vain jos F on normaalijakauma. $\square$

Esimerkki 7.13 Olkoot X ja Y jatkuvat satunnaismuuttujat, joiden yhteisjakauman tiheysfunktio on f. Määritellään lineaarinen muunnos

$$\begin{aligned} u &= ax + by, \\ v &= cx + dy. \end{aligned} \tag{7.6.9}$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmästä (7.6.9) x ja y saadaan käänteismuunnos

$$\begin{aligned} x &= \frac{du - bv}{D}, \\ y &= \frac{av - cu}{D}, \end{aligned}$$

missä $D = ad - bc$. Käänteismuunnos on olemassa, jos $D \neq 0$. Muunnoksen Jakobiaani on

$$J = \begin{vmatrix} \frac{d}{D} & \frac{-b}{D} \\ \frac{-c}{D} & \frac{a}{D} \end{vmatrix} = \frac{ad - bc}{D^2} = \frac{1}{D}.$$

Satunnaisvektorin (U, V) yhteisjakauman tiheysfunktio on yhtälön (7.6.3) nojalla

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{|D|} f[(du - bv)/D, (av - cu)/D]. \tag{7.6.10}$$

Esimerkin 7.11 yhtälö (7.6.5) on yhtälön (7.6.10) erikoistapaus. Kun $a = b = c = 1$ ja $d = -1$ sijoitetaan yhtälöön (7.6.10), saadaan yhtälö (7.6.5). Lineaarinen muunnos

$$\begin{aligned} u &= ax + by + e, \\ v &= cx + dy + f. \end{aligned}$$

voidaan palauttaa muunnokseen (7.6.9) merkitsemällä $u^* = u - e$ ja $v^* = v - f$, jolloin

$$\begin{aligned} u^* &= ax + by, \\ v^* &= cx + dy. \end{aligned}$$

Yhtälöstä (7.6.10) saadaan sitten (U^*, V^*):n tiheysfunktio. $\square$

7.6.1 Yleinen kahden muuttujan normaalijakauma

Standardimuotoinen kaksiulotteinen normaalijakauma määriteltiin alaluvussa 7.5.1. Yleinen kaksiulotteinen normaalijakauma voidaan määritellä standardimuotoisen normaalijakauman avulla vastaavasti kuin yhden muuttujan tapauksessa. Olkoon (X, Y) sellainen satunnaisvektori, että $E(X) = \mu_1$,

$E(Y) = \mu_2$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma_1^2$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_2^2$ ja $\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{12}$. Silloin satunnaisvektorin (X,Y) keskiarvovektori on $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\mathsf{T}$ ja kovarianssimatriisi

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Satunnaismuuttujien X ja Y välinen korrelaatiokerroin on $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$.

Määritelmä 7.6 Satunnaisvektori (X,Y) noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvovektori on $\boldsymbol{\mu}$ ja kovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Sigma}$, jos se voidaan lausua muodossa

$$\begin{aligned} X - \mu_1 &= \sigma_1\sqrt{1-\rho^2}Z_1 + \rho\sigma_1 Z_2, \\ Y - \mu_2 &= \sigma_2 Z_2, \end{aligned} \tag{7.6.11}$$

missä Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomat ja noudattavat standardimuotoista normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0,1)$ sekä $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ ja $|\rho| \le 1$.

Merkitsemme $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kun (X,Y) noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvovektori on $\boldsymbol{\mu}$ ja kovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Sigma}$. Normaalijakaumaa $\mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ noudattava satunnaisvektori (X,Y) saadaan aina riippumattomista standardoiduista normaalimuuttujista lineaarisella muunnoksella (7.6.11)

Yleisen normaalijakauman tiheysfunktio saadaan suoraan Esimerkissä 7.13 esitetyllä tekniikalla. Merkitään $x - \mu_1 = u$ ja $y - \mu_2 = v$. Koska nyt lineaarisessa muunnoksessa (7.6.9) $c = 0$ ja $D = ad$, saa yhtälö (7.6.10) muodon

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{ad} f\left(\frac{du - bv}{ad}, \frac{v}{d}\right).$$

Koska f on kahden muuttujan standardimuotoisen normaalijakauman tiheysfunktio ja muunnoksessa (7.6.11) $a = \sigma_1\sqrt{1-\rho^2}$, $b = \rho\sigma_1$ ja $d = \sigma_2$, niin

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}(\sigma_2 u - \rho\sigma_1 v)^2 + \frac{v^2}{\sigma_2^2}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{u}{\sigma_1}\frac{v}{\sigma_2} + \frac{v^2}{\sigma_2^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Kun edellä johdettuun tiheysfunktioon sijoitetaan $u = x - \mu_1$ ja $v = y - \mu_2$, saadaan (X,Y):n tiheysfunktio

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Bigg[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Bigg(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \\ - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\Bigg)\Bigg]. \end{aligned} \tag{7.6.12}$$

Seuraavassa lauseessa esitetään kaksiulotteisen normaalijakauman keskeiset ominaisuudet.

Lause 7.9 *Oleteaan, että satunnaisvektori* (X,Y) *noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa* $\mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, *missä* $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\mu_2)^\mathsf{T} = [E(X),E(Y)]^\mathsf{T}$ *ja*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

ja $\rho = \mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$. *Silloin pitävät paikkansa seuraavat ominaisuudet:*

1. $X \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ *ja* $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$,

2. X *ja* Y *ovat riippumattomat jos ja vain jos* $\rho = 0$.

3. X*:n ja* Y*:n ehdolliset jakaumat:*

$$X \mid y \sim \mathrm{N}\Big(\mu_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\Big),$$

eli X *noudattaa normaalijakaumaa ehdolla, että* $Y = y$ *on annettu. Vastaavasti*

$$Y \mid x \sim \mathrm{N}\Big(\mu_2 + \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\Big).$$

4. *Satunnaisvektorin* (X,Y) *momenttifunktio on*

$$M(s,t) = \exp\Big(\mu_1 s + \mu_2 t + \frac{\sigma_1^2 s^2 + \sigma_2^2 t^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 st}{2}\Big).$$

Lause 7.10 *Satunnaisvektori* (X,Y) *noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa, jos ja vain jos satunnaismuuttujien* X *ja* Y *lineaarikombinaatiot* $aX + bY$ *noudattavat yksiulotteista normaalijakaumaa kaikilla* $a \in \mathbb{R}$ *ja* $b \in \mathbb{R}$.

7.6.2 Studentin t-jakauma, F-jakauma ja beta-jakauma

Oletetaan, että satunnaismuuttujat Z ja U ovat riippumattomat, $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ ja U noudattaa χ^2-jakaumaa vapausastein r eli $U \sim \mathrm{Khi2}(r)$. Tarkastellaan nyt satunnaismuuttujan

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/r}} \tag{7.6.13}$$

jakaumaa. Tätä muotoa olevalla satunnaismuuttujalla on erittäin keskeinen rooli tilastollisessa päättelyssä. Satunnaismuuttuja (7.6.13) noudattaa ns. *Studentin t-jakaumaa* (tai lyhyesti t-jakaumaa) vapausastein r. Jakauma on nimetty englantilaisen tilastotieteilijän W. S. Gossetin mukaan. Gosset esitti tämän jakauman *Biometrikassa* vuonna 1908 nimimerkillä "Student". Kun T noudattaa Studentin t-jakaumaa vapausastein r, merkitään $T \sim \mathrm{t}(r)$.

Olkoon $X_1, X_2, \dots, X_n$ on otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Silloin siis satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \dots, X_n$ ovat toisistaan riippumattomat ja $X_i \sim\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $1 \le i \le n$. Otoksesta laskettu suure

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} \tag{7.6.14}$$

eli otossuure noudattaa t-jakaumaa vapausastein $n - 1$, missä $\overline{X}$ on otoskeskiarvo ja

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

on otosvarianssi. Lausekkeen (7.6.14) osoittaja $(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ noudattaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, 1)$ ja satunnaismuuttuja $(n-1)S^2/\sigma^2$ noudattaa jakaumaa $\mathrm{Khi2}(n - 1)$. Koska $\overline{X}$ ja S^2 ovat toisistaan riippumattomat, niin lausekkeen (7.6.14) osoittaja ja nimittäjä ovat toisistaan riippumattomat.

Satunnaismuuttujan (7.6.13) eli Studentin t-jakauman tiheysfunktio vapausastein r on

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \frac{1}{(1 + t^2/r)^{(r+1)/2}}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{7.6.15}$$

Huomaa, että vapausastein $r = 1$ tiheysfunktiosta (7.6.15) tulee Cauchyn jakauman tiheysfunktio.

Tiheysfunktio (7.6.15) saadaan suoraviivaisesti edellä esitetyllä muunnostekniikalla. Lähdetään liikkeelle satunnaisvektorin (Z, U) yhteisjakaumasta. Koska Z ja U ovat riippumattomat, niin

$$f_{Z,U}(z, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\Gamma(r/2) 2^{r/2}} u^{r/2-1} e^{-u/2}, \; -\infty < z < \infty, \; 0 < v < \infty.$$

Tehdään muunnos

$$t = \frac{z}{\sqrt{u/r}}, \qquad w = u,$$

jonka käänteismuunnos on

$$z = t\sqrt{w/r}, \qquad u = w.$$

Muunnoksen jakobiaani on $\sqrt{w/r}$. Sen jälkeen voidaan soveltaa muunnoskaavaa (7.6.3). T:n tiheysfunktio saadaan (T, W):n yhteisjakauman tiheysfunktiosta integroimalla w:n yli:

$$f_T(t) = \int_0^\infty f_{Z,U}\left[t(w/r)^{1/2}, w\right] (w/r)^{1/2} \,\mathrm{d}w.$$

Laskennan lopputuloksena on t-jakauman tiheysfunktio (7.6.15). Yksityiskohdat jätetään lukijan tehtäväksi.

Studentin t-jakaumalla ei ole momenttifunktiota, koska sillä ei ole kaikkien kertalukujen momentteja. Jos $T_r \sim \mathrm{t}(r)$, niin silloin T_r:llä on ainoastaan $r-1$ ensimmäistä momenttia. Esimerkiksi jakaumalla $\mathrm{t}(1)$ ei ole keskiarvoa ja jakaumalla $\mathrm{t}(2)$ ei ole varianssia. Voidaan laskemalla osoittaa, että

$$(7.6.16) \qquad E(T_r) = 0, \quad \text{jos } r > 1, \qquad \mathrm{Var}(T_r) = \frac{r}{r-2}, \quad \text{jos } r > 2.$$

Toinen tilastollisessa päättelyssä keskeinen jakauma, *Snedecorin F-jakauma* tai vain lyhyesti F-jakauma, voidaan johtaa t-jakauman tapaan. Jos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $X_1, X_2, \ldots, X_m$ otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, niin silloin satunnaismuuttuja

$$(7.6.17) \qquad \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

noudattaa F-jakaumaa vapausastein $n-1$ ja $m-1$. Lausekkeessa (7.6.17) S_1^2 ja S_2^2 ovat otosvarianssit. S_1^2/σ_1^2 ja S_2^2/σ_2^2 ovat riippumattomat ja

$$(n-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \mathrm{Khi2}(n-1), \qquad (m-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \mathrm{Khi2}(m-1).$$

F-jakauma määritellään seuraavasti: Jos $X \sim \mathrm{Khi2}(r)$ ja $Y \sim \mathrm{Khi2}(s)$ ovat riippumattomat, niin satunnaismuuttuja

$$(7.6.18) \qquad F = \frac{X/r}{Y/s}$$

noudattaa F-jakaumaa vapausastein r ja s. Silloin merkitään $F \sim \mathrm{F}(r,s)$. F-jakauman tiheysfunktio voidaan johtaa vastaavalla tavalla kuin t-jakauman tiheysfunktio. Määritellään muunnos

$$U = X + Y, \qquad V = \frac{X/r}{Y/s},$$

missä F-suuretta (7.6.18) on merkitty kirjaimella V. Muunnoksen käänteismuunnos on

$$X = \frac{r}{s}\Big(1 + \frac{r}{s}V\Big)^{-1}UV, \qquad Y = \Big(1 + \frac{r}{s}V\Big)^{-1}U.$$

Koska X ja Y ovat riippumattomat, niin

$$f_{X,Y}(X,Y) = k_r k_s x^{(r/2)-1} y^{(s/2)-1} \mathrm{e}^{-(x+y)/2}, \qquad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

missä $k_r = 1/\Gamma\big(\frac{r}{2}\big)2^{r/2}$ ja $k_s = 1/\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)2^{s/2}$. Kun lasketaan Jakobiaani ja tehdään sijoitukset, saadaan satunnaisvektorin (U,V) tiheysfunktio $f_{U,V}(u,v)$ kaavan (7.6.3) mukaisesti. V:n reunajakauman tiheysfuntio on sitten F-jakauman tiheysfuntio:

$$(7.6.19) \qquad f_F(v) = \frac{\Gamma\big(\frac{r+s}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{r}{2}\big)\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)}\Big(\frac{r}{s}\Big)^{r/2} \frac{v^{(r/2)-1}}{\big[1 + \frac{r}{s}v\big]^{(r+s)/2}}, \qquad 0 < v < \infty.$$

F-jakauman keskiarvo ja varianssi ovat

$$E(F) = \frac{s}{s-2}, \qquad s > 2 \tag{7.6.20}$$

$$\mathrm{Var}(F) = \frac{2s^2(r+s-2)}{r(s-2)^2(s-4)}, \qquad s > 4. \tag{7.6.21}$$

Beta-jakauma

Olkoot $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$ ja $Y \sim \text{Gamma}(\beta, \theta)$ riippumattomat gammajakaumaa noudattavat satunnaismuuttujat. Silloin satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio on

$$f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\theta^{\alpha+\beta}} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \exp\Big(-\frac{x+y}{\theta}\Big), \qquad 0 < x, \quad y < \infty.$$

Tarkastellaan muunnosta

$$U = \frac{X}{X+Y}, \qquad V = X + Y,$$

jonka käänteismuunnos on

$$X = UV, \qquad Y = V - UV.$$

Muunnoksen Jakobiaani on

$$\begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = v(1-u) + uv = v.$$

Satunnaisvektorin (U, V) tiheysfunktio on kaavan (7.6.3) mukaan

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (uv)^{\alpha-1}(v-uv)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-v\theta} v,$$

missä $0 < u < 1$ ja $0 < v < \infty$. Kun tästä (U, V):n yhteisjakauman tiheysfunktiosta määritetään U:n reunajakuman tiheysfunktio, saadaan

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}, \qquad 0 < u < 1. \tag{7.6.22}$$

Sanomme, että U noudattaa betajakaumaa parametrein α ja β. Silloin merkitsemme $U \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$. Koska (7.6.22) on tiheysfunktio, niin

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u.$$

Funktiota

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{7.6.23}$$

kutsutaan *betafunktioksi.*

Betajakauma on yksi niitä harvoja nimettyjä jakaumia, joiden koko todennäköisyysmassa on äärellisellä valillä, eli välillä $(0,1)$. Betajakauman momentit on helppo laskea tiheysfunktion erityisominaisuuksien avulla. Kun $n > -\alpha$, niin

$$E(X^n) = \frac{B(\alpha+n,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)\Gamma(\alpha)}. \tag{7.6.24}$$

Sijoittamalla $n = 1$ ja $n = 2$ kaavaan (7.6.24) saadaan 1. ja 2. momentti ja niiden avulla varianssi:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}. \tag{7.6.25}$$

Esimerkki 7.14 Oletetaan, että on suoritettavana $n + m$ työtä. Töiden suorittamiseen tarvittavat ajat noudattavat toisistaan riippumatta eksponettijakaumaa keskiarvolla $\theta > 0$ (ts. gammajakaumaa parametrein $\alpha = 1$ ja θ.) Oletetaan, että kaksi eri työntekijää tekee nämä työt siten, että työntekijä A tekee työt $1, 2, \ldots, n$ ja B tekee työt $n+1, n+2, \ldots, n+m$. Jos merkitään X:llä työntekijän A käyttämää aikaa ja Y:llä työntekijän B käyttämää aikaa, niin toisistaan riippumatta $X \sim \mathrm{Gamma}(n,\theta)$ ja $Y \sim \mathrm{Gamma}(m,\theta)$. Silloin $(n + m)$:n työn vaatima kokonaisaika $X + Y$ noudattaa gammajakaumaa $\mathrm{Gamma}(n+m,\theta)$. Työntekijän A käyttämä suhteellinen osuus $X/(X+Y)$ kokonaisajasta noudattaa betajakaumaa $\mathrm{Beta}(n,m)$. □

7.7 Järjestyssuureet

Otoksen suurin ja pienin arvo sekä keskimääräinen arvo, mediaani, ovat tärkeitä otossuureiden arvojen järjestykseen perustuvia tunnuslukuja. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos. Merkitään otoksen pienintä arvoa $X_{(1)}$ seuraavaksi pienintä $X_{(2)}$ ja niin edelleen, joten

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}.$$

Tämä indeksointi tarkoittaa sitä, että otosarvot pannaan kasvavaan järjestykseen. Jos otos on esimerkiksi 5.0, 3.1, 2.7, 6.1, 5.3, niin järjestetty otos on 2.7, 3.1, 5.0, 5.3, 6.1. Nyt siis esimerkiksi $X_1 = 5.0$, $X_{(1)} = 2.7$ ja $X_{(3)} = 5.0$ on mediaani ja $X_3 = 2.7$. Nyt siis

$$X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$$

ja

$$X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Tunnusluku $X_{(k)}$ on otoksen k. järjestystunnusluku.

7.7.1 Maksimi ja minimi

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakaumasta, jonka kertymäfunktio on $F(x)$. Maksimin kertymäfunktio on

$$\begin{aligned}
F_{(n)}(x) &= P(X_{(n)} \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x,\ X_2 \leq x,\ \ldots,\ X_n \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x),
\end{aligned}$$

koska $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ ovat riippumattomat. Kertymäfunktion määritelmän mukaan $P(X_i \leq x) = F(x)$, joten

$$F_{(n)}(x) = [F(x)]^n.$$

Minimin kertymäfunktio on

$$\begin{aligned}
F_{(1)}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\
&= 1 - P(X_{(1)} > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x,\ X_2 > x,\ \ldots,\ X_n > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \\
&= 1 - [1 - F(x)]^n.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.15 Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos eksponenttijakaumasta $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Määritetään minimin $X_{(1)}$ jakauma. Eksponenttijakauman $\mathrm{Exp}(\lambda)$ kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{\lambda x}, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

Silloin minimin kertymäfunktio on

$$F_{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda x}, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

Minimi noudattaa siis eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(n\lambda)$. □

Jos otos on jatkuvasta jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x)$, saadaan $X_{(1)}$:n ja $X_{(n)}$:n jakaumien tiheysfunktiot derivoimalla kertymäfunktiot $F_{(n)}(x)$ ja $F_{(1)}(x)$. Nyt siis maksimin tiheysfunktio on

$$f_{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x)]^n = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

ja minimin tiheysfunktio on

$$f_{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(1 - [1 - F(x)]^n\big) = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x).$$

7.7.2 Järjestyssuureen $X_{(k)}$ jakauma

Olkoon $X_1, X_2, \dots, X_n$ otos jakaumasta, jonka kertymäfunktio on $F(x)$. Johdetaan nyt järjestystunnusluvun $X_{(k)}$, $1 < k < n$, jakauma. Jos $\{X_{(k)} \le x\}$, niin silloin ainakin k otosarvoa on pienempiä tai korkeintaan yhtä suuria kuin x. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tapausta $n = 3$. Johdetaan mediaanin $X_{(2)}$ jakauma. Tapahtuma $\{X_{(2)} \le x\}$ toteutuu täsmälleen silloin, kun $\{X_1 \le x,\ X_2 \le x\}$ tai $\{X_1 \le x,\ X_3 \le x\}$ tai $\{X_2 \le x,\ X_3 \le x\}$ tai $\{X_1 \le x,\ X_2 \le x,\ X_3 \le x\}$. Koska

$$P(X_i \le x,\ X_j \le x) = [F(x)]^2[1 - F(x)], \qquad i \ne j$$

ja

$$P(X_1 \le x,\ X_2 \le x,\ X_3 \le x) = [F(x)]^3,$$

niin

$$\begin{aligned} F_{(2)}(x) = P(X_{(2)} \le x) &= 3[F(x)]^2[1 - F(x)] + [F(x)]^3 \\ &= \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{3-i}. \end{aligned} \tag{7.7.1}$$

Yleisessä tapauksessa vastaava kaava voidaan johtaa samalla periaatteella. Emme kuitenkaan käsittele yleisen kaavan johtoa sen tarkemmin, toteamme vain, että $X_{(k)}$:n kertymäfunktio on

$$F_{(k)}(x) = P(X_{(k)} \le x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}. \tag{7.7.2}$$

Jos otos on jatkuvasta jakaumasta, saadaan vastaava tiheysfunktio derivoimalla kertymäfunktio. Esitetään ensin $X_{(2)}$:n tiheysfunktio, kun $n = 3$. Kun kertymäfunktio (7.7.1) derivoidaan, saadaan

$$\begin{aligned} f_{(2)}(x) = F'_{(2)}(x) &= 3 \cdot 2F(x)f(x)[1 - F(x)] - 3[F(x)]^2 f(x) + 3[F(x)]^2 f(x) \\ &= 3!F(x)[1 - F(x)]f(x). \end{aligned}$$

Derivoimalla lauseke (7.7.2) saadaan satunnaismuuttujan $X_{(k)}$ tiheysfunktio yleisessä tapauksessa ($1 \le k \le n$):

$$f_{(k)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x). \tag{7.7.3}$$

Esimerkki 7.16 Olkoon X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$. Jakauman kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Silloin mediaanin tiheysfunktio on lausekkeen (7.7.3) nojalla

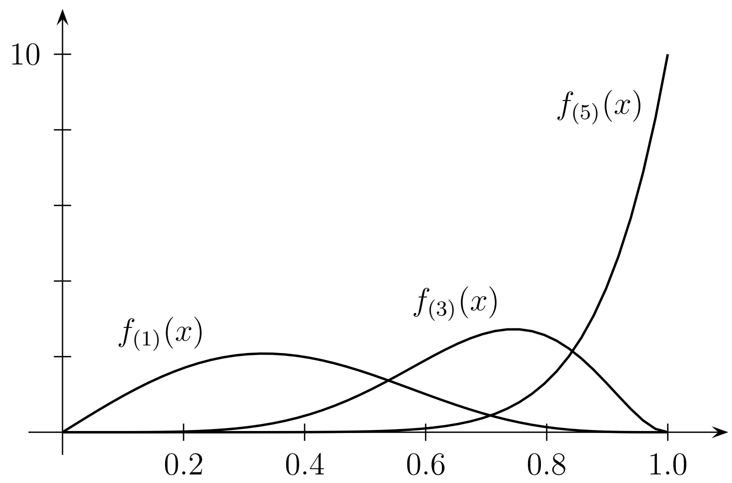
$$f_{(3)}(x) = \frac{5!}{2!2!}x^4(1-x^2)^2 \cdot 2x = 60x^5(1-x^2)^2, \qquad 0 < x < 1.$$

Vastaavasti minimin tiheysfunktio on

$$f_{(1)}(x) = 10x(1-x^2)^4, \qquad 0 < x < 1$$

ja maksimin tiheysfunktio on

$$f_{(5)}(x) = 10x^9, \qquad 0 < x < 1.$$



Kuvio 7.4. Minimin, maksimin ja mediaanin tiheysfunktio, kun otos on jakaumasta $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$.

$\square$

Moniulotteiset jakaumat: Yhteenveto

Diskreetti kaksiulotteinen jakauma

Satunnaisvektorin (X, Y) yhteisjakauma.

Todennäköisyysfunktio $f(x, y)$ toteuttaa ehdot

1. $0 \le f(x, y) \le 1, \quad$ kaikilla $(x, y) \in S$ ja
2. $\displaystyle\sum_{(x,y)\in S} f(x, y) = 1,$

missä S on satunnaisvektorin (X, Y) arvojoukko.

Reunajakaumien todennäköisyysfunktiot:

$$f_X(x) = \sum_{y\in S_Y} f(x, y), \quad x \in S_X; \qquad f_Y(y) = \sum_{x\in S_X} f(x, y), \quad y \in S_Y.$$

Ehdolliset todennäköisyysfunktiot:

$$f_1(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{ja} \quad f_2(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \qquad (x,y) \in S.$$

Bernoulli
Ber2(p_1, p_2, p_{11})

$f(x,y) = p_{00}^{(1-x)(1-y)} p_{01}^{(1-x)y} p_{10}^{x(1-y)} p_{11}^{xy}$, missä

$p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$, $x \in \{0,1\}$ ja $y \in \{0,1\}$

$E(X) = p_1 = P(X = 1)$, $E(Y) = p_2 = P(Y = 1)$

$E(XY) = p_{11} = P(X = 1, Y = 1)$

Multinomi
Mult$(n, \boldsymbol{p})$

$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, missä

$0 \le p_i \le 1$ ja $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$

$E(X_i) = np_i$, $\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$

$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j$

$X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p_i)$, $(X_i, X_j) \sim \mathrm{Mult}(n; p_i, p_j, 1 - p_i - p_j)$

$M(t) = (p_1\mathrm{e}^{t_1} + \cdots + p_k\mathrm{e}^{t_k})^n$

Hypergeometrinen

$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \dfrac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\cdots\binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$, missä

$N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$ ja $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$

Muuttujien vaihto

Satunnaismuuttujan $Y = h(X)$ tiheysfunktio, kun X:n tiheysfunktio on $f_X(x)$:

$$f_Y(y) = f_X\big[g(y)\big]|g'(y)|, \qquad y \in S_Y,$$

missä $g(y)$ on $h(x)$:n käänteisfunktio.

Jatkuva kaksiulotteinen jakauma

– Jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y muodostaman satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio toteuttaa ehdot

1. $f(x,y) \ge 0$ kaikilla (x,y),
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$,
3. $P[(X,Y) \in A] = \iint\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Reunajakaumien tiheysfunktiot

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in S_X; \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y \in S_Y$$

Ehdolliset tiheysfunktiot

$$f_X(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad \text{ja} \qquad f_Y(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)},$$

missä $f_X(x) > 0$ ja $f_Y(y) > 0$.
Kertymäfunktio

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

– **Normaalijakauma** $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2\big(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\big)$.
Tiheysfunktio

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} Q(x,y)\Big],$$

missä

$$Q(x,y) = \Big(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\Big)^2 - 2\rho\Big(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\Big)\Big(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\Big) + \Big(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\Big)^2.$$

Reunajakaumat:

$$X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad \text{ja} \qquad Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Ehdolliset jakaumat:

X:n jakauma ehdolla $Y = y$ on

$$X \mid y \sim \mathrm{N}\Big[\mu_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\Big],$$

Y:n jakauma ehdolla $X = x$ on

$$Y \mid x \sim \mathrm{N}\Big[\mu_2 + \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\Big].$$

Muuttujien vaihto

Olkoon

$$U = h_1(X,Y); \qquad V = h_2(X,Y)$$

muunnos, jolla on käänteismuunnos $x = g_1(u,v)$, $y = g_2(u,v)$. Satunnaisvektorin (U,V) yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f_{U,V}(u,v) = f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)|J|,$$

missä $f(x,y)$ on satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio ja

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Ehdolliset odotusarvot ja varianssit

- **Ehdollinen odotusarvo**

$$E(Y) = E[E(Y \mid X)]$$

- **Ehdollinen varianssi**

$$\mathrm{Var}(Y) = E[\mathrm{Var}(Y \mid X)] + \mathrm{Var}[E(Y \mid X)].$$

- **Studentin t-jakauma** $T \sim t(r)$.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/r}} \sim t(r),$$

jos $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ ja $U \sim \mathrm{Khi2}(r)$ ovat riippumattomat. Silloin

$$E(T) = 0, \quad r > 1 \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{r}{r-2}, \quad r > 2.$$

- **F-jakauma** $F \sim \mathrm{F}(r,s)$.

$$F = \frac{X/r}{Y/s} \sim F(r,s),$$

jos $X \sim \mathrm{Khi2}(r)$ ja $Y \sim \mathrm{Khi2}(s)$ ovat riippumattomat. Silloin

$$E(F) = \frac{s}{s-2}, \quad s > 2; \qquad \mathrm{Var}(F) = \frac{2s^2(r+s-2)}{r(s-2)^2(s-4)}, \quad s > 4.$$

- **Beta-jakauma** $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
Tiheysfunktio

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1.$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Harjoituksia

1. Määritellään X:n ja Y: yhteisjakauman todennäköisyysfunktio seuraavasti:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{32}, \qquad \text{kun} \quad x = 1,2; \quad y = 1,2,3,4.$$

Määritä

(a) X:n reunajakauman todennäköisyysfunktio ja

(b) Y:n reunajakauman todennäköisyysfunktio.
(c) Laske $P(X > Y)$,
(d) $P(Y = 2X)$ ja
(e) $P(X + Y = 3)$.

2. X:n ja Y:n yhteisjakauman todennäköisyysfunktio on määritelty 1. tehtävässä.

(a) Laske odotusarvot μ_X ja μ_Y,
(b) varianssit σ_X^2 ja σ_Y^2 sekä
(c) korrelaatiokerroin ρ.
(d) Ovatko X ja Y riippumattomat?

3. X:n ja Y:n yhteisjakauman todennäköisyysfunktio on määritelty 1. tehtävässä.

(a) Määritä X:n ehdolliset todennäköisyysfunktiot $f_1(x \mid y)$ ehdolla $y = 1, 2, 3$ ja $y = 4$.
(b) Määritä Y:n ehdolliset todennäköisyysfunktiot $f_2(y \mid x)$ ehdolla $x = 1$ ja $x = 2$.
(c) Laske $P(1 \le Y \le 3 \mid X = 1)$, $P(Y \le 2 \mid X = 2)$, ja $P(X = 2 \mid Y = 3)$.
(d) Laske $E(Y \mid X = 1)$ ja $\mathrm{Var}(Y \mid X = 1)$.

4. Testataan kymmenen suojakypärän iskukestävyys. Kypärät jaetaan kahteen viiden ryhmään. Ensimmäisen ryhmän kypärille annetaan isku, joka särkee kypärän todennäköisyydellä 0.1. Toisen ryhmän kypäriä isketään voimalla, joka särkee kypärän todennäköisyydellä 0.3. Millä todennäköisyydellä ensimmäisen ryhmän kypäriä rikkoontuu enemmän kuin toisen ryhmän kypäriä?

5. Oletetaan, että satunnaismuuttujat X_1, X_2, X_3 noudattavat multinomijakaumaa $\mathrm{Mult}(5; 0.1, 0.3, 0.6)$ [Toisin sanoen $(X_1, X_2) \sim \mathrm{Tri}(5; 0.1, 0.3)$].

(a) Määritä X_1:n reunajakauma ja X_2:n
(b) ehdollinen todennäköisyysfunktio $f_2(x_2 \mid x_1 = 1)$.

6. Nostetaan tavallisesta korttipakasta (52 korttia) satunnaisesti palauttamatta 13 korttia. Olkoon X_1 patojen lukumäärä, X_2 herttojen lukumäärä ja $13 - X_1 - X_2$ ruutujen ja ristien lukumäärä otoksessa.

(a) Määritä X_1:n ja X_2:n yhteisjakuman todennäköisyysfunktio. Mikä on satunnaisvektorin (X_1, X_2) arvoalue?
(b) X_1:n todennäköisyysfunktio ja arvoalue?

7. Oletetaan, että (X, Y) noudattaa trinomijakaumaa $\mathrm{Tri}\big(3, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\big)$.

(a) Laske odotusarvot μ_X ja μ_Y,

(b) varianssit σ_X^2 ja σ_Y^2 sekä

(c) kovarianssi $\mathrm{Cov}(X, Y)$ ja

(d) korrelaatiokerroin ρ.

8. Satunnaismuuttujat $X \geq 0$ ja $Y \geq 0$ ovat riippumattomat ja saavat vain kokonaislukuarvoja. Osoita, että

(a) $P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=0)\, P(Y=n-k)$.

(b) Heitetään 4:ää harhatonta noppaa ja lasketaan silmälukujen summa. Mikä on todennäköisyys, että summa on 8? (Vihje: Olkoon X kahden nopan silmälukujen summa ja Y kahden muun nopan silmälukujen summa.)

9. Määritä Esimerkissä 5.13 X:n ja Y:n jakaumien (reunajakaumien) tiheysfunktiot. Totea, että X ja Y ovat riippumattomat.

10. Totea laskemalla, että Esimerkissä 7.7 $E(X \mid y) = \frac{y}{2}$, $0 \leq y \leq 1$.

11. Olkoon jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman kertymäfunktio

$$F(x,y) = \begin{cases} kxy(x+y), & \text{kun } 0 < x < 1 \text{ ja } 0 < y < 1; \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

(a) Laske vakion k arvo ja määritä X:n ja Y:n yhteisjakauman tiheysfunktio.

(b) Määritä X:n reunajakauman ja ehdollisen jakauman tiheysfunktio.

(c) Laske todennäköisyydet

$$P(X < 0.5,\ Y < 0.5); \qquad P(X < 0.5); \qquad P(X < 0.5 \mid Y < 0.5).$$

12. Määritä a, b, c, d siten, että

(a) $P(a \leq F_{8,12} \leq b) = 0.8$; $\quad P(c \leq F_{6,6} \leq d) = 0.98$.

(b) $P(|t_9| \geq a) = 0.05$; $\quad P(|t_{20}| > b) = 0.95$.

(c) $P(F_{1,12} \geq b) = 0.05$; $\quad P(F_{1,12} \leq c) = 0.2$.

13. Olkoot Y ja Z sellaiset riippumattomat satunnaismuuttujat, että $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ ja $Y \sim \chi_4^2$. Määritä a, b siten, että

$$P(Z \leq a\sqrt{Y}) = 0.975; \qquad P(Y + Z^2 \leq b) = 0.975.$$

14. Oletetaan, että $X \sim t(\nu)$. Osoita muuttujien vaihtotekniikalla, että $X^2 \sim \mathrm{F}_{1,\nu}$. (Huomaa, että muunnos ei ole monotoninen).

15. Olkoon X:n ja Y:n yhteisjakauman tiheysfunktio (Esimerkki 7.3)

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2(1-|y|), \qquad -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1.$$

Määritä X:n ja Y:n jakaumien (reunajakaumien) tiheysfunktiot. Totea, että X ja Y ovat riippumattomat.

16. Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat tasajakaumaa Tas$(0,1)$. Laske todennäköisyydet

(a) $P(|X-Y| \leq \frac{1}{2})$ ja

(b) $P(|\frac{X}{Y} - 1| \leq \frac{1}{2})$.

17. Olkoot X ja Y riippumattomat standardoidut normaalimuuttujat. Määritellään muuttujat

$$U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}; \qquad V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}.$$

Kirjoita U:n ja V:n yhteisjakauman tiheysfunktio. Näytä, että U ja V ovat riippumattomat.

18. Satunnaisvektori (X,Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa parametrein $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 9$ ja $\rho = 0.8$.

(a) Kirjoita (X,Y):n yhteisjakauman tiheysfunktion lauseke,

(b) $E(Y \mid x)$ ja

(c) $\mathrm{Var}(Y \mid x)$.

(Ks. Lause 7.9.)

19. Erääseen naisten kunto-ohjelmaan osallistuneilta mitattiin kehon rasvaprosentti X ennen ohjelman alkua ja rasvaprosenttin muutos Y ohjelman lopussa. Oletetaan, että muuttujien yhteisjakauma on normaalinen ja $\mu_X = 24.5$, $\sigma_X = 4.8$, $\mu_Y = -0.2$, $\sigma_Y = 3.0$ ja $\rho_{XY} = -0.32$. Laske

(a) $P(1.3 \leq Y \leq 5.8)$,

(b) $E(Y \mid X = x)$,

(c) $\mathrm{Var}(Y \mid X = x)$,

(d) $P(1.3 \leq Y \leq 5.8 \mid X = 18)$.

(Ks. Lause 7.9.)

20. Oletetaan, että satunnaisvektori (X,Y) noudattaa standardimuotoista normaalijakaumaa, missä $\mathrm{Cor}(X,Y) = 0.6$. Laske $P(X-Y < 1,\ X+Y > 2)$.

21. Olkoot X ja Y riippumattomat satunnaismuuttujat, joiden tiheysfunktiot ovat

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad f(y) = \mathrm{e}^{-y}, \qquad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty.$$

Esitä satunnaisvektorin (U, V) yhteisjakauman tiheysfunktio, kun $U = X - Y$ ja $V = X + Y$.