**Matemaattinen tilastotiede**
6. harjoitukset, 50. vko 2006

6.1. Osoita oikeaksi väitteet:

(a) Jos $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, niin $(U,V) \sim \mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$, missä $U = (X-\mu_1)/\sigma_1$ ja $V = (X-\mu_2)/\sigma_2$.

(b) Jos $(U,V) \sim \mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$, niin $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

6.2. Oletetaan, että satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ noudattavat normaalijakaumaa $\mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$. Määritellään $U = X+Y$ ja $V = X-Y$. Osoita, että (ks. Esimerkki 7.11)

(a) $U$ ja $V$ noudattavat normaalijakaumaa $\mathrm{N}_2(0,0,2(1{+}\rho),2(1{-}\rho),0)$.

(b) $U$ ja $V$ ovat riippumattomat.

(c) $U \sim \mathrm{N}(0, 2(1+\rho)$ ja $V \sim \mathrm{N}(0, 2(1-\rho)$.

6.3. Oletetaan, että satunnaismuuttujat $X_r$, $r = 1, 2, \ldots$ noudattavat $t$-jakaumaa vapausastein $r$.

(a) Osoita, että $E(X_1)$ ei ole olemassa (ks. Esimerkki 6.15).

(b) $E(X_i) = 0$, kun $i \geq 2$.

6.4. Oletetaan, että $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$ eli $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ ja $\mathrm{Cor}(X,Y) = \rho$. Osoita:

(a) Jos $\rho = 0$, niin $X$ ja $Y$ ovat riippumattomat.

(b) Jos $X$ ja $Y$ ovat riippumattomat, niin $\rho = 0$.

6.5. Olkoot $X_1, X_2$ riippimattomat ja $X_i \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2)$, $i = 1,2$. Määritellään

$$\begin{aligned} Y_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \\ Y_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \end{aligned}$$

Osoita, että $Y_1$ ja $Y_2$ ovat riippumattomat ja $Y_i \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2)$, $i = 1,2$.

6.6. Jatkona tehtävään 5 osoita, että $(Y_1^2 + Y_2^2)/\sigma^2$ noudattaa $\chi^2$-jakaumaa Khi2(2).

6.7. Riippumattomat satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots, X_{18}$ noudattavat $\chi^2$-jakaumaaa Khi2(1).

(a) Mitä jakaumaa noudattaa $Y = \sum_{i=1}^{18} X_i$? (Ks. Lauseet 6.6 - 6.8 ja Seuraus 6.1)

(b) Laske todennäköisyydet

$$P(Y > 9.390) \qquad \text{ja} \qquad P(Y \leq 34.80).$$

6.8. Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, missä $\mu = k\sigma (k > 0)$. Otoskeskiarvo ja otosvarianssi ovat

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{ja} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

(a) Määritä todennäköisyyden $P(a\mu < \bar{X} < b\mu, 0 < S^2 < c\sigma^2)$ lauseke, missä $a, b$ ja $c$ ovat vakioita, $a < b$ ja $c > 0$ (Huom. $\bar{X}$ ja $S^2$ ovat riippumattomat ja $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \mathrm{Khi2}(n-1)$).

(b) Laske edellisen kohdan todennäköisyys, kun $a = 1/2, b = 3/2, c = 1.487, k = 1.5$ ja $n = 16$.