Matemaattinen tilastotiede
6. harjoitukset, 50. vko 2006

6.1. Osoita oikeaksi väitteet:

(a) Jos $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, niin $(U,V) \sim \mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$, missä $U = (X-\mu_1)/\sigma_1$ ja $V = (X-\mu_2)/\sigma_2$.

(b) Jos $(U,V) \sim \mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$, niin $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

Ratkaisu1. Määritelmän 7.6 mukaan $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, jos se voidaan lausua muodossa

$$\begin{aligned} X-\mu_1 &= \sigma_1\sqrt{1-\rho^2}Z_1 + \rho\sigma_1 Z_2, \\ Y-\mu_2 &= \sigma_2 Z_2, \end{aligned}$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\begin{aligned} \tfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} &= \sqrt{1-\rho^2}Z_1 + \rho Z_2, \\ \tfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2} &= Z_2, \end{aligned}$$

Edellä Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomat ja noudattavat standardimuotoista normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0,1)$ sekä $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ ja $|\rho| \leq 1$. Siis määritelmän 7.6 mukaan

$$(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho) \equiv (U,V) \sim \mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho).$$

Ratkaisu2. (1) Jos $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, niin

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{1}{2}Q(x,y)], \tag{0.0.1}$$

missä

$$Q(x,y) = -\frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right).$$

Sijoitetaan $x = \mu_1 + \sigma_1 u$ ja $y = \mu_2 + \sigma_2 v$ lausekkeeseen (0.0.1). Muunnoksen Jacobin determinantti J on

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{1}{2}Q(u,v)]|J| \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{1}{2}Q(u,v)], \end{aligned} \tag{0.0.2}$$

missä

$$Q(u,v) = \frac{1}{1-\rho^2}(u^2 - 2\rho uv + v^2),$$

joten (0.0.2) on $\mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$:n tiheysfunktio.
(2) Jos $(U,V) \sim \mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$, niin (U,V):n tiheysfunktio on (0.0.2). Kun siihen sijoitetaan $u = (x-\mu_1)/\sigma_1$ ja $v = (y-\mu_2)/\sigma_2$ ja lasketaan muunnoksen Jacobin determinatti

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2},$$

saadaan sijoituksen jälkeen tiheysfunktio (0.0.1). Siis $(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

6.2. Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat normaalijakaumaa $\mathrm{N}_2(0,0,1,1,\rho)$. Määritellään $U = X+Y$ ja $V = X-Y$. Osoita, että (ks. Esimerkki 7.11, s. 203)

(a) U ja V noudattavat normaalijakaumaa $\mathrm{N}_2(0,0,2(1+\rho),2(1-\rho),0)$.

(b) U ja V ovat riippumattomat.

(c) $U \sim \mathrm{N}(0,2(1+\rho)$ ja $V \sim \mathrm{N}(0,2(1-\rho)$.

Ratkaisu. (a) Muunnoksen $u = x+y, v = x-y$ käänteismuunnos on

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \frac{u-v}{2},$$

jonka Jakobiaani on

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Koska

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)]$$

ja

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{2} f_{X,Y}(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{u+v}{2})^2 - 2\rho(\frac{u+v}{2})(\frac{u-v}{2}) + (\frac{u-v}{2})^2)] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((1-\rho)u^2 + (1+\rho)v^2)] \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2(1+\rho)}\sqrt{2(1-\rho)}}\ \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{u^2}{2(1+\rho)} + \frac{v^2}{2(1-\rho)}]\}, \end{aligned}$$

joten $(U,V) \sim \mathrm{N}_2(0,0,2(1+\rho),2(1-\rho),0)$.

(*b*)

$$
\begin{aligned}
f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1+\rho)}}\ \exp\{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{2(1+\rho)}\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1-\rho)}}\ \exp\{-\frac{1}{2}\frac{v^2}{2(1-\rho)}\} \\
&= f_U(u)f_V(v),
\end{aligned}
$$

joten U ja V ovat riippumattomat.
(*c*) Koska $f_U(u)$ on $\mathrm{N}[0,2(1+\rho)]$:n tiheysfunktio ja $f_V(v)$ on $\mathrm{N}[0,2(1-\rho)]$:n tiheysfunktio, niin $U \sim \mathrm{N}[0,2(1+\rho)]$ ja $V \sim \mathrm{N}[0,2(1-\rho)]$.