

## Matemaattisen tilastotieteen perusteet

### 5. harjoitukset, 49. vko 2008

- 5.1. Henkilön verenpaine  $X$  kotimittarilla mitattuna noudattaa normaalijakaumaa  $X \sim N(\mu, 2\sigma^2)$ . Terveysasemalla mitattuna verenpaine  $Y$  noudattaa normaalijakaumaa  $N(\mu, \sigma^2)$ . Jos  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomat, laske todennäköisyys, että keskiarvo  $(X+Y)/2$  poikkeaa odotusarvosta  $\mu$  korkeintaan puolitoista hajontaa.
- 5.2. Riippumattomat satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat normaalijakaumaa  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  ja  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Määritellään satunnaismuuttujat  $U = aX + b$  ja  $V = cY + d$ , missä  $a, b, c$  ja  $d$  ovat vakioita.
- (a) Osoita momenttifunktion avulla, että
- $$U \sim N(a\mu_1 + b, (a\sigma_1)^2), \quad V \sim N(c\mu_2 + d, (c\sigma_2)^2).$$
- (b) Määritä  $U$ :n ja  $V$ :n yhteisjakauman momenttifunktio.
- (c) Osoita edellisten kohtien avulla, että  $U$  ja  $V$  ovat riippumattomat.
- 5.3. Oletetaan, että satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat kaksiulotteista normaalijakaumaa  $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ . Osoita, että  $E(XY) = \mu_1\mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2$ . (Vihje: Voit käyttää esimerkiksi Määritelmää 7.9)
- 5.4. Oletetaan, että satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat kaksiulotteista normaalijakaumaa  $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , missä  $\mu_1 = 70, \mu_2 = 80, \sigma_1^2 = 100, \sigma_2^2 = 169$  ja  $\rho = 5/13$ . Laske
- (a)  $E(Y|X = 72)$ .
- (b)  $\text{Var}(Y|X = 72)$ .
- (c)  $P(Y \leq 84|X = 72)$ .
- (Sovella sivulta 208 Lauseen 7.9 tuloksia).
- 5.5. Oletetaan, että satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat kaksiulotteista normaalijakaumaa  $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , missä  $\mu_1 = 3.2, \mu_2 = 12, \sigma_1^2 = 1.44, \sigma_2^2 = 16$  ja  $\rho = 0.7$ .
- (a) Määritä  $X$ :n ja  $Y$ :n jakaumat ja
- (b)  $Y$ :n ehdollinen jakauma ehdolla  $X = 3.8$ .
- (c) Laske  $E(X|Y = 10)$  ja  $\text{Var}(X|Y = 10)$  sekä
- (d) todennäköisyydet  $P(0.8 < X < 4.2)$ ,  $P(Y > 14)$  ja
- (e)  $P(X > 3.2|Y = 10)$ ,  $P(Y < 12|X = 3.8)$

(Sovella sivulta 208 Lauseen 7.9 tuloksia).

5.6. Riippumattomat satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat normaalijakaumaa  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  ja  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

- (a) Määritä satunnaismuuttujan  $X - Y$  jakauma.
- (b) Laske todennäköisyys  $P(X > Y)$  (Riippuu parametreista  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ ).
- (c) Päättele, että  $P(X > Y) = 0.5$ , jos  $\mu_1 = \mu_2$ .

5.7. Riippumattomat satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  noudattavat normaalijakaumaa  $N(0, 1)$  ja

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y).$$

- (a) Määritä  $U$ :n ja  $V$ :n yhteisjakauman tiheysfunktio  $f_{U,V}$ .
- (b) Päättele yhteisjakauman tiheysfunktioista  $f_{U,V}$  reunajakaumien tiheysfunktioita  $f_U$  ja  $f_V$  integroimatta.
- (c) Totea, että  $U$  ja  $V$  ovat riippumattomat.

5.8. Satunnaisvektori  $(X, Y)$  noudattaa standardimuotoista normaalijakaumaa  $N_2(0, 0, 1, 1; \rho)$  [ $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$  ja  $\text{Cor}(X, Y) = \rho$ ].

- (a) Laske odotusarvo  $E[(X - aY - b)^2]$ , missä  $a$  ja  $b$  ovat vakioita (Vihje: Lausu  $[(X - aY) - b]^2 = (X - aY)^2 - 2b(X - aY) + b^2$ ).
- (b) Merkitään  $q(a, b) = E[(X - aY - b)^2]$ . Millä  $a$ :n ja  $b$ :n arvoilla funktio  $q(a, b)$  saavuttaa miniminsä?