

TILTA1B Matemaattisen tilastotieteen perusteet
Ratkaisut harjoitus 5
49. viikko 2008

1. $\frac{X+Y}{2} \sim N(\mu, \frac{3}{4}\sigma^2)$, joten

$$P\left(\left|\frac{X+Y}{2} - \mu\right| \leq 1.5\sigma\right) = 2\Phi(\sqrt{3}) - 1 \approx 0.917$$

3 $Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E(XY) - \mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}$, joten ratkaisemalla saadaan, että

$$E(XY) = \mu_1\mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2$$

Tehtävä voidaan ratkaista myös määritelmän 7.6 tai odotusarvon määritelmän perusteella.

4 Katso ehdollisen jakauman kaavat esim. sivulta 217

a) ja b) $E(Y|X = 72) = 81$, $Var(Y|X = 72) = 144$ eli $Y|X = 72 \sim N(81, 144)$

c) $P(Y \leq 84|X = 72) = \Phi\left(\frac{84-81}{\sqrt{144}}\right) \approx 0.5987$

5 a) $X \sim N(3.2, 1.44)$; $Y \sim N(12, 16)$

b) $E(Y|X = 3.8) = 13.4$, $Var(Y|X = 3.8) = 8.16$ eli $Y|X = 3.8 \sim N(13.4, 8.16)$

c) $E(X|Y = 10) = 2.78$, $Var(X|Y = 10) \approx 0.7344$ eli $X|Y = 10 \sim N(2.78, 0.7344)$

d) $P(0.8 < X < 4.2) \approx 0.775$

$$P(Y > 14) = 1 - P(Y \leq 14) = 0.3085$$

e) $P(X > 3.2|Y = 10) = 1 - P(X \leq 3.2|Y = 10) = 1 - \Phi\left(\frac{3.2-2.78}{\sqrt{0.7344}}\right) = 0.312$

$$P(Y < 12|X = 3.8) = \Phi\left(\frac{12-13.4}{\sqrt{8.16}}\right) \approx 0.312$$

6 a) $X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

b) $P(X > Y) = P(X - Y > 0) = \dots = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$

7. a) $f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$

b) $f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}} = f_U(u)f_V(v)$

c) Edellisen kohdan perusteella $f_{U,V}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$, joten U ja V riippumattomia.