

Matemaattisen tilastotieteen perusteet

4. harjoitukset, 48. vko 2008

4.1. Määritellään X :n ja Y : yhteisjakauman todennäköisyysfunktio seuraavasti:

$$f(x, y) = \frac{x + y}{32} \quad \text{kun } x = 1, 2; \quad y = 1, 2, 3, 4.$$

- (a) Määritä X :n ja Y :n reunajakaumien todennäköisyysfunktiot ja
- (b) Laske X :n ja Y :n välinen korrelaatiokerroin.

4.2. Olkoon X :n todennäköisyysfunktio $f_X(x) = \frac{1}{10}$, $x = 0, 1, 2, \dots, 9$ ja Y :n ehdolliset todennäköisyysfunktiot ovat $f_2(y|x) = \frac{1}{10-x}$, $y = x, x + 1, \dots, 9$.

- (a) Määritä X :n ja Y : yhteisjakauman todennäköisyysfunktio $f(x, y)$ sekä
- (b) Y :n reunajakauman todennäköisyysfunktio $f_Y(y)$ ja laske $E(Y|x)$.

4.3. Oletetaan, että (X, Y) noudattaa trinomijakaumaa $\text{Tri}(3, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

- (a) Laske odotusarvot μ_X, μ_Y ja varianssit σ_X^2, σ_Y^2 sekä
- (b) kovarianssin $\text{Cov}(X, Y)$ ja korrelaatiokerroimen ρ .

4.4. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on:

y/x	-1	0	1
-1	a	b	a
0	b	0	b
1	a	b	a

missä $a, b > 0$ ja $a + b = 1/4$.

- (a) Määritä X :n ja Y :n reunajakaumien todennäköisyysfunktiot f_X ja f_Y .
- (b) Laske $E(X)$, $E(Y)$ ja $E(XY)$.
- (c) Totea laskemalla, että $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Osoita, että X ja Y eivät ole riippumattomat.

4.5. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x, y) = x + y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Laske todennäköisyys $P(X < Y)$.

4.6. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty$$

ja $f(x, y) = 0$ muualla. Laske todennäköisyys $P(X < 1)$.

4.7. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x, y) = \frac{6}{5}(x + y^2), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Osoita, että X :n ja Y :n reunajakaumien tiheysfunktiot ovat

$$f_X(x) = \frac{2}{5}(3x + 1), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad f_Y(y) = \frac{3}{5}(2y^2 + 1), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

4.8. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x, y) = xe^{-(x+y)}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

- (a) Määritä reunajakaumien tiheysfunktiot f_X ja f_Y ja
- (b) ehdollinen tiheysfunktio $f_{Y|X}(y|x)$.
- (c) Laske $P(X > \log 4)$ (luonnollinen logaritmi).