

Matemaattinen tilastotiede

3. harjoitukset, 47. vko 2008

3.1. Määritellään funktio f seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{c}, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{muualla,} \end{cases}$$

missä $g(x) = x^2 - x + 1$. Määritä vakio c siten, että $f(x)$ on tiheysfunktio.

- (a) Jos $f(x)$ on X :n tiheysfunktio, niin laske $P(X > \frac{3}{4})$.
- (b) Laske X :n odotusarvo ja varianssi.

3.2. Olkoon satunnaismuuttujan X tiheysfunktio $f(x) = x^2/9, 0 < x < 3$, ja 0 muualla. Määritä satunnaismuuttujan $Y = X^3$ tiheysfunktio.

3.3. Jos $X \sim \text{Tas}(0, 1)$ ja $Y = -2 \log X$, niin osoita, että $Y \sim \text{Khi2}(2)$.

3.4. Oletetaan, että $X \sim \text{Gamma}(3, 2)$. Määritä satunnaismuuttujan $Y = \sqrt{X}$ tiheysfunktio.

3.5. Oletetaan, että $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Johda satunnaismuuttujan $Y = e^X$ tiheysfunktio.

3.6. Olkoon $X \sim \text{Tas}(-1, 1)$ ja $Y = X^r$, missä $r \geq 1$ on positiivinen kokonaisluku. Johda Y :n tiheysfunktio, kun (a) r on pariton, (b) r on parillinen.

3.7. Riippumattomat satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(1)$ ja $U = X + Y$.

- (a) Määritä U :n momenttifunktio. Mikä on U :n jakauma?
- (b) Kirjoita U :n tiheysfunktio.
- (c) Laske U :n odotusarvo ja varianssi.

3.8. Satunnaismuuttujat X ja Y esittävät tietyn kappaleen läpötilaa Celsius ja Fahrenheit asteina. Silloin $Y = \frac{9}{5}X + 32$ ja $X = \frac{5}{9}Y - \frac{160}{9}$.

- (a) Jos $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, niin määritä X :n jakauma.
- (b) Jos $P(90 \leq Y \leq 95) = 0.95$, niin joillakin $a < b$ on $P(a \leq X \leq b) = 0.95$. Määritä a ja b .