Matemaattinen tilastotiede
2. harjoitukset, 46. viikko 2008

2.1. Olkoon X:n tiheysfunktio $f(x) = \frac{c}{x^2}$, $1 < x < \infty$.

(a) Määritä c:n arvo siten, että $f(x)$ on tiheysfunktio.

(b) Osoita, että $E(X)$ ei ole äärellinen.

2.2. Oletetaan, että jatkuva satunnaismuuttuja X noudattaa tasajalaumaa $\mathrm{Tas}(0,1)$. Laske (a) $E(e^X)$ ja (b) $P(e^X \leq \frac{4}{3})$. (Ks. alaluku 6.2.1)

2.3. Oletetaan, että tapahtuma sattuu t:n pituisella aikavälillä Poissonin jakauman $\mathrm{Poi}(\lambda t)$ mukaisella todennäköisyydellä. Osoita, että kahden peräkkäisen tapahtuman välinen aika T noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\frac{1}{\lambda})$. (Ohje: Osoita, että $P(T > t) = e^{-\lambda t}$, ks. alaluku 6.2.2).

2.4. Satunnaismuuttuja X noudattaa gammajakaumaa $\Gamma(\alpha, \beta)$.

(a) Osoita, että $E(X) = \alpha\beta$ ja $\mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2$.

(b) Jos $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, niin erikoistapauksena edellisestä kohdasta osoita, että $E(X) = \theta$ ja $\mathrm{Var}(X) = \theta^2$.

(c) Jos $X \sim \mathrm{Khi2}(r)$, niin $E(X) = r$ ja $\mathrm{Var}(X) = 2r$, missä r on positiivinen kokonaisluku.

2.5. Olkoon satunnaismuuttujan X momenttifunktio $M_X(t) = e^{\alpha t + \beta t^2}$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\beta > 0$. (a) Määritä X:n jakauma ja (b) X:n 1. ja 2. momentti (Vihje: Tarkastele normaalijakauman momenttifunktiota ja huomaa, että momenttifunktio määrittelee jakauman yksikäsitteisesti).

2.6. Oletetaan, että $X \sim$Khi2(r), missä r on positiivinen kokonaisluku.

(a) Etsi jakauman $\mathrm{Khi2}(r)$ tiheysfunktion maksimi eli jakauman $\mathrm{Khi2}(r)$ moodi, kun $r \geq 2$.

(b) Määritä jakauman $\mathrm{Khi2}(4)$ mediaani.

(c) Piirrä jakauman $\mathrm{Khi2}(r)$ tiheysfunktion kuvaaja, kun $r = 4$ ja $r = 10$.

2.7. Olkoon Φ satunnaismuuttujan $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ kertymäfunktio. Silloin $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$, kun $0 \leq a < b$. Osoita normaalijakauman tiheysfunktion symmetrisyyttä käyttäen, että

(a) $P(a < Z < b) = \Phi(-a) + \Phi(b) - 1$, kun $a \leq 0 < b$.

(b) $P(a < Z < b) = \Phi(-a) - \Phi(-b)$, kun $a \leq b < 0$.

(c) $P(-c < Z < c) = 2\Phi(c) - 1$, kun $c > 0$.

(d) Määritä c-kohdassa c:n arvo siten, että $P(-c < Z < c) = 0.95$.

2.8. Olkoon X mikä tahansa satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on μ ja varianssi σ^2. Määritä Tšebyševin epäyhtälön (ks. alaluku 4.5) avulla todennäköisyyksien $P(|X-\mu| < k\sigma),\ k = 1, 2, 3$ alarajat. Jos tiedetään, että $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, niin mitä nämä todennäköisyydet ovat silloin? Laske esimerkiksi `R`:llä.