TILTA1B Matemaattisen tilastotieteen perusteet
Ratkaisut harjoitus 2
46. viikko 2008

1. a) Ratkaisemalla $\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{c}{x^2}\mathrm{dx} = 1$ saadaan, että $c = 1$

   b) E(X)= $\lim_{a\to\infty}\int_1^a x\frac{1}{x^2}\mathrm{dx} = \ldots = \lim_{a\to\infty}$ln a $\to \infty$

2. a) $E(e^X) = \int_0^1 e^X\mathrm{dx} = \ldots = e - 1$

   b) $P(e^X \leq \frac{4}{3}) = P(X \leq \ln(\frac{4}{3})) = \int_0^{\ln(\frac{4}{3})}\mathrm{dx} = \ln(\frac{4}{3})$

3. Vastaavanlainen tehtävä ratkaistu alaluvussa 6.2.2

4. a) $E(X) = \int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}e^{\frac{X}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x\mathrm{dx} = \ldots = \alpha\beta$

   $E(X^2) = \int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}e^{\frac{X}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^2\mathrm{dx} = \ldots = \alpha(\alpha+1)\beta^2$

   $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha\beta^2$

   b) $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, niin $X \sim \mathrm{Gamma}(1,\theta)$,
   joten a-kohdan perusteella $E(X) = \theta$ ja $\mathrm{Var}(X) = \theta^2$

   c) $X \sim \mathrm{Khi2}(\theta)$, niin $X \sim \mathrm{Gamma}(\frac{r}{2}, 2)$,
   joten a-kohdan perusteella $E(X) = r$ ja $\mathrm{Var}(X) = 2r$

5. a) $X \sim N(\alpha, 2\beta)$

6. a) Derivoimalla Khi2(r)-jakauman tiheysfunktio ja ratkaisemalla nollakohdat ja niistä edelleen maksimi saadaan, että $x = r - 2$.

   b)
   ```
   qchisq(0.5, 4)
   # 3.356694
   ```

   c)
   ```
   x<- seq(0,30,0.1)
   plot(x, dchisq(x,4), type ="l")
   lines(x, dchisq(x, 10), lty=2)
   ```

8 $P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$
Sijoittamalla saadaan vastaukset. Esimerkiksi, kun k=2 alaraja on 0.75.
Normaalijakauman tapauksessa

```
pnorm(1) - pnorm(-1)  # 0.683
pnorm(2) - pnorm(-2)  # 0.954
pnorm(3) - pnorm(-3)  # 0.997
```