

Matemaattisen tilastotieteen perusteet

1. harjoitukset, 45. viikko 2008

- 1.1. Määritä binomijakauman $\text{Bin}(n, p)$ odotusarvo ja varianssi momenttifunktion avulla (ks. Lause 5.2).
- 1.2. Olkoon $X \sim \text{Bin}(100, 0.01)$ ja $Y \sim \text{Poi}(1)$. Laske R:llä vertailun vuoksi todennäköisyydet $P(X = i)$ ja $P(Y = i)$, $i = 0, 1, \dots, 10$. Miten tulkitset tuloksen Poissonin lauseen (Lause 5.10) avulla?
- 1.3. Puhelinmyyjä soittaa myyntipuheluita tietyn listan mukaan ja kauppa syntyy todennäköisyydellä 0.1. Puheluiden tulokset ovat toisistaan riippumattomat. Olkoon X ensimmäiseen kauppaan tarvittavien soittojen määrä.
 - (a) Laske $E(X)$.
 - (b) Myyjä soittaa 10 puhelua. Millä todennäköisyydellä hän ansaitsee ainakin 20 euroa, jos yhdestä kaupasta saa 10 euroa?
 - (c) Myyjä lopettaa soittelun, kunnes ansiot ovat 30 euroa. Millä todennäköisyydellä hän tarvitsee enemmän kuin 4 puhelua?
- 1.4. Testi muodostuu monivalintatehtävistä, joissa on 2 vastausvaihtoehtoa. Toinen vaihtoehto on oikein ja toinen väärin. Testiohjelma antaa kysymyksiä peräkkäin yhden kerrallaan ja ilmoittaa välittömästi, onko vastaus oikein vai väärin. Testi päättyy, kun testattava on vastannut 5:een kysymykseen oikein tai yrittänyt 8 kertaa.
 - (a) Mikä on todennäköisyys, että arvaajan testi päättyy kuudenteen kysymykseen?
 - (b) Millä todennäköisyydellä arvaaja suoriutuu testistä hyväksytysti?
 - (c) Mikä on arvaajan antamien vastausten lukumäärän odotusarvo?
- 1.5. Onnettomuuksien lukumäärä X kuukaudessa eräällä tieosuudella noudattaa Poissonin jakaumaa $\text{Poi}(1.5)$. Määritä seuraavien tapahtumien todennäköisyydet:
 - (a) Ei onnettomuuksia tammikuussa,
 - (b) yhteensä neljä onnettomuutta helmikuussa ja maalikuussa,
 - (c) ainakin yksi onnettomuus vuoden jokaisena kuukautena.(Vihje: Poissonin prosessi)
- 1.6. Oletetaan, että vakavien (X) ja lievien (Y) onnettomuuksien lukumäärät ovat toisistaan riippumattomat, $X \sim \text{Poi}(1)$ ja $Y \sim \text{Poi}(3)$ (Esimerkki 5.8). Havaitaan, että $X + Y = 10$. Laske

- (a) $E(X \mid X + Y = 10)$ ja
- (b) $P(Y > 15 \mid X + Y = 10)$.

1.7. Leipomossa valmistetaan suuri taikina, josta tehdään rusinapullia. Leipomoyrittäjä haluaa, että todennäköisyydellä 0.99 satunnaisesti valittu pulla sisältää ainakin 3 rusinaa. Kuinka monta rusinaa pullaa kohti hänen pitää sekoittaa taikinaan? (Vihje: Katso Esimerkki 5.11)

1.8. Momenttifunktio määrittää jakauman yksikäsitteisesti.

- (a) Tarkastele tuttuja diskreettejä jakaumia noudattavien satunnaismuuttujien momenttifunktiota ja tunnista niiden avulla sen satunnaismuuttujan X jakauma, jonka momenttifunktio on $M(t) = 1/3 + (2/3)e^t$.
- (b) Määritä X :n todennäköisyysfunktio, odotusarvo ja varianssi.
- (c) Oletetaan, että satunnaismuuttujat Y_i , $i = 1, 2, 3$ ovat riippumattomat ja noudattavat samaa jakaumaa kuin X . Määritä satunnaismuuttujan $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ momenttifunktio. Mitä jakaumaa Y noudattaa.