Monimuuttujamenetelmät
4. harjoitukset, 6.2.2003

4.1. Olkoon

(a) Laske Hotellingin T^2-testisuureen arvo testattessa hypoteesia H_0 : $\boldsymbol{\mu} = (7, 11)'$, kun havaintomatriisi on $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 8 \\ 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}'$.

(b) Mitä T^2-jakaumaa testisuure noudattaa (vapausasteet)?

(c) Testaa hypoteesi F-testisuureen avulla.

4.2. Osoita laskemalla, että

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 = s_y^2 + s_x^2 - 2s_{yx},$$

missä s_y^2 ja s_x^2 ovat muuttujien otosvarianssit ja s_{yx} otoskovarianssi (Pykälä 5.4.1).

4.3. Tiedostossa `Lapset` on viidentoista noin kaksivuotiaan lapsen pituudet, rinnanympärysmitat ja käsivarren ympärykset sentteinä. Kuusi ensimmäistä havaintoa on poikia ja loput tyttöjä.

(a) Laske poikien ja tyttöjen kovarianssimatriisi ja niiden avulla koko aineiston yhteinen kovarianssimatriisi $\mathbf{S}_{pl}$.

(b) Testaa Hotellingin T^2-testillä, ovatko poikien ja tyttöjen keskiarvovektorit samat.

4.4. Uuden astmalääkkeen vaikutusta kokeiltiin viiteen miespotilaaseen ja viiteen naispotilaaseen. Potilaiden hengitystilavuus mitattiin 5 kertaa: $5, 10, 30, 60$ ja 120 minuuttia lääkkeen nauttimisen jälkeen. Miesten hengitystilavuuden keskiarvot olivat $\bar{\mathbf{y}}_m = (20.8, 24.4, 22.6, 19.2, 14.0)'$ ja vastaavat naisten keskiarvot $\bar{\mathbf{y}}_n = (24.8, 21.8, 24.6, 23.2, 20.4)'$. Simämääräiseti näyttäisi siltä, että lääkkeen keuhkoja laajentava vaikutus häipyy miehillä nopeammin kuin naisilla.

(a) Selitä, mitä tarkoittavat hypoteesit $\boldsymbol{\mu}_m = \boldsymbol{\mu}_n$ ja $\mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}_m - \boldsymbol{\mu}_n) = (0, 0, 0, 0)'$, missä $\boldsymbol{\mu}_m$ on miesten ja $\boldsymbol{\mu}_n$ naisten teoreettinen (oletettu) keskiarvovektori ja $\mathbf{C}$ on matriisi, jonka rivit ovat $(1, -1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1, -1)$.

(b) Testaa hypoteesi $\mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}_m - \boldsymbol{\mu}_n) = \mathbf{0}$, kun havaintojen kovarianssimatriisi on

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 72.7 & 33.0 & 71.7 & 18.7 & 22.3 \\ & 21.3 & 21.3 & 12.7 & 11.9 \\ & & 41.3 & 16.4 & 9.8 \\ & & & 11.5 & 10.2 \\ & & & & 21.7 \end{pmatrix}.$$

4.5. Tutkija vertaili kolmea indikaattoria, joilla pyrittiin mittaamaan sydäkohtauksen vakavuutta. Erään sairaalan ensiavussa kerättiin seuraavat 40 potilaan aineistoon perustuvat tiedot:

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 46.1 \\ 57.3 \\ 50.4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 101.3 & 63.0 & 71.0 \\ & 80.2 & 55.6 \\ & & 97.4 \end{pmatrix}.$$

(a) Kaikkien kolmen indeksin arvo määritettiin jokaiselta potilaalta. Testaa 5%:n riskitasolla hypoteesi, että kaikkien indeksien arvo on sama.

(b) Testaa myös indeksien odotusarvot pareittain ($\mu_i = \mu_j,\ i \neq j$.)

4.6. Aineistossa `Pojat` on 25 perheen 1. ja 2. poikien pään pituudet ja leveydet (aikuisina). Merkitään muuttujia y_1 = 1. pojan pään pituus ja y_2 pään leveys, y_3 = 2. pojan pään pituus ja y_4 pään leveys.

(a) Poikkeavatko 1. ja 2. poikien pään dimensiot toisistaan? Testaa sopiva hypoteesi. (Vihje: Muodosta uudet muuttuvat $x_1 = y_1 - y_3$ ja $x_2 = y_2 - y_4$. Tarkastele muuttujaa $\mathbf{x} = (x_1, x_2)'$.)

(b) Täytyykö olettaa, että satunnaisvektori $(y_1, y_2, y_3, y_4)'$ noudattaa normaalijakaumaa vai riittääkö olettaa, että $\mathbf{x}$ noudattaa normaalijakaumaa? Vai ovatko nuo oletukset keskenään yhtäpitävät?

4.7. (jatkoa Tehtävään 6)

(a) Piirrä erotusmuuttujan $\mathbf{x} = (x_1, x_2)'$ pisteparvi. Piirrä kuvioon myös keskiarvopiste $\bar{\mathbf{x}}$.

(b) Määritä sellainen $\mathbf{a}$:n arvo $\hat{\mathbf{a}}$, että $|t(\mathbf{a})|$ saavuttaa maksiminsa (ks. (5.3.5) ja (5.7.20)).

(c) Testaa hypoteesi $\hat{\mathbf{a}}'\boldsymbol{\mu} = 0$, missä $\mathrm{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}$.