Monimuuttujamenetelmät
3. harjoitukset, 30.1.2003

3.1. Olkoon

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

missä $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(a) Laske $\boldsymbol{\Sigma}$:n Choleskyn hajotelma $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{TT}'$, missä $\mathbf{T}$ on yläkolmiomatriisi.

(b) Kirjoita y_1:n ja y_2:n lausekkeet, kun $\mathbf{y} = \mathbf{Tz} + \boldsymbol{\mu}$ ja $\mathbf{z} \sim N_2(\mathbf{0}, \mathbf{I}_2)$, missä $\mathbf{z}' = (z_1, z_2)$.

3.2. Oletetaan, että $\mathbf{y} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, missä $\boldsymbol{\mu} = (\,1 \quad 1 \quad 2\,)'$ ja

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 58 & 29 \\ 10 & 29 & 38 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Laske
(a) $\mathrm{E}(\mathbf{y}_2 | y_1 = 2)$
(b) $\mathrm{cov}(\mathbf{y}_2 | y_1 = 2)$.

3.3. Simuloi 10, 30 ja 100 alkion otokset normaalijakaumasta $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, missä parametrien $\boldsymbol{\mu}$ ja $\boldsymbol{\Sigma}$ arvot ovat samat kuin tehtävässä 2. Laske otoskeskiarvot ja otoskovarianssit.

3.4. Satunnaisvektorit $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ ja $\mathbf{y}_4$ ovat riippumattomat ja noudattavat normaalijakaumaa $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

(a) Mitä ovat satunnaisvektorien

$$w_1 = \frac{1}{4}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{y}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{y}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{y}_4 \text{ ja } \mathbf{w}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{y}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{y}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{y}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{y}_4$$

jakaumat?

(b) Määritä satunnaisvektorin

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix}$$

jakauma.

3.5. Tarkastellaan kahden muuttujan y_1, y_2 normaalijakumaa, jonka odotusarvo $\mathrm{E}(y_1) = \mu_1 = 0$, $\mathrm{E}(y_2) = \mu_2 = 2$, $\mathrm{var}(y_1) = \sigma_{11} = 2$, $\mathrm{var}(y_2) = \sigma_{22} = 1$ ja muuttujien välinen korrelaatio $\rho_{12} = 0.5$.
(a) Kirjoita kyseinen kahden muuttujan normaalijakauman tiheysfunktio.
(b) Mikä on funktion $(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = 1$ kuvaaja? (y_1 ja y_2 reaalimuuttujia)

3.6. Satunnaisvektori $\mathbf{y}$ noudattaa normaalijakaumaa $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ parametrein

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mitkä seuraavista satunnaismuuttujista ovat riippumattomat?
(a) y_1 ja y_2,
(b) y_1 ja y_3,
(c) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ja y_3,
(d) $\frac{1}{2}(y_1 + y_3)$ ja y_3,
(e) y_2 ja $y_2 - \frac{5}{2}y_1 - y_3$.

3.7. Oletetaan, että $\mathbf{y} \sim \mathrm{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, missä

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

(a) Määritä satunnaismuuttujan $z = 2y_1 - y_2 + 3y_3$ jakauma ja
(b) satunnaismuuttujien $z_1 = y_1 + y_2 + y_3$ ja $z_2 = y_1 - y_2 + 2y_3$ yhteisjakauma.
(c) Mikä on y_2:n jakauma,
(d) y_1:n ja y_3:n yhteisjakauma?
(e) y_1:n,y_3:n ja $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$:n yhteisjakauma?