Monimuuttujamenetelmät
1. harjoitukset, 16.1.2003

1.1. Olkoon havaintomatriisi

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Keskistä ja
(b) standardoi havainnot.
(c) Laske $\mathbf{S}$:n determinantti $|\mathbf{S}|$ (yleistetty varianssi).

1.2. Merkitään

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix},$$

missä s_i on i. ($i = 1, 2, 3$) muuttujan hajonta.
(a) Näytä, että $\mathbf{S} = \mathbf{DRD}$ ja $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{SD}^{-1}$, kun $\mathbf{R}$ on korrelaatiomatriisi ja

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s_3^{-1} \end{pmatrix}$$

on $\mathbf{D}$:n käänteismatriisi.
(b) Lausu $\mathbf{S}$:n determinantti hajontojen ja $\mathbf{R}$:n determinantin avulla.
(c) Tarkista tulos 1. tehtävän datan avulla.

1.3. Olkoon $\mathbf{a}' = (a_1, a_2, a_3)$, missä $a_1 = \frac{1}{2}$ ja $a_2 = a_3 = \frac{1}{4}$. Laske muuttujan $z = \mathbf{a}'\mathbf{y} = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3$
(a) keskiarvo ja
(b) varianssi 1. tehtävän aineistosta.

1.4. Piirrä 1. tehtävän aineistosta
(a) pisteparvi $(y_{i1}, y_{i2}),\ i = 1, 2, 3$ sekä
(b) keskistettyjen ja
(c) standardoitujen havaintojen pisteparvi koordinaatistoon.

1.5. Osoita, että

(a) $\bar{z} = \mathbf{a}'\bar{\mathbf{y}}$ ja
(b) $s_z^2 = \mathbf{a}'\mathbf{Sa}$, kun $z_i = \mathbf{a}'\mathbf{y}_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

1.6. Määritellään lineaariset yhdisteet

$$z_1 \qquad = y_1 + y_2 + y_3$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= 2y_1 - 3y_2 + 2y_3 \\
z_3 &= -y_1 - 2y_2 - 3y_3.
\end{aligned}
$$

Lausu
(a) $\bar{\mathbf{z}}$ $\mathbf{y}$:n keskiarvovektorin ja $\mathbf{S}_z$ $\mathbf{y}$:n kovarianssimatriisin avulla.
(b) Lausu $\mathbf{R}_z$ kovarianssimatriisin $\mathbf{S}_z$ avulla.

1.7. Merkitään POJAT-aineiston (pojat.dat) ensimmäisten poikien pään mittoja $\mathbf{y} = (y_1, y_2)'$ ja toisten poikien vastaavia mittoja $\mathbf{x} = (x_1, x_2)'$
(a) Laske keskiarvot ja lausu ne ositettuna vektorina $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$.
(b) Laske kovarianssimatriisi ja lausu se ositettuna

$$
\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{yy} & \mathbf{S}_{yx} \\ \mathbf{S}_{xy} & \mathbf{S}_{xx} \end{pmatrix}.
$$

1.8. Olkoon havaintomatriisi

$$
\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Osoita laskemalla, että kaava (2.6.11) pitää tässä tapauksessa paikkansa (Osoita: $|\mathbf{S}|$ = suunnikkaan ala). Hahmottele suunnikas.

1.9. (a) Pisteiden A ja B koordinaatit ortogonaalisten akseleiden x_1 ja x_2 suhteen ovat $A: (3, -2)'; B: (5, 1)'$. Jos akseleita kierretään 20° vastapäivään, niin mitkä ovat A:n ja B:n koordinaatiti uusien akselien x_1^* ja x_2^* suhteen.

(b) Pisteen A koordinaatit ortogonaalisten akseleiden x_1 ja x_2 suhteen $(5, 2)'$. Kierretään akseleita myötäpäivään kulman θ verran. Pisteen A koordinaatit uusien kierrettyjen akselien suhteen ovat $(3.69, 3.93)$. Laske θ.