Tilastollinen päättely I
7. harjoitukset, 9. vko 2005
(Eksponenttimuodosta englanninkielisen viiden sivun monisteen sivuilla 3-4.)

7.1. Oletetaan, että $X \sim \text{Poi}(\theta)$. Esitetään Poissonin jakauman todennäköisyysfunktio eksponenntimuodossa siten, että

$$f(x;\theta) = \frac{\exp(-\theta)\theta^x}{x!} = \exp[p(\theta)K(x) + S(x) + q(\theta)],$$

kun $y = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) Todenna, että $p(\theta) = \log\theta, q(\theta) = -\theta$ ja $K(x) = x$.

(b) Totea laskemalla, että $E(X) = -\frac{q'(\theta)}{p'(\theta)}$.

7.2. (a) Esitä geometrinen jakauma $f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$ $(0 < \theta < 1)$ eksponenttimuodossa (kuuluu eksponentiaaliseen perheeseen).

(b) Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos geometrisesta jakaumasta $\text{Geo}(\theta)$. Hae geometrisen jakauman tapauksessa muotoa $T = \sum_{i=1}^n K(X_i)$ oleva tyhjentävä tunnusluku.

7.3. (a) Tarkista, että normaalijakauma $\text{N}(\theta_1, \theta_2)$ kuuluu kaksiparametriseen eksponentiaaliseen perheeseen eli sen tiheysfunktio voidaan lausua muodossa

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \exp[p_1(\theta_1,\theta_2)K_1(x)+p_2(\theta_1,\theta_2)K_2(x)+S(x)+q(\theta_1,\theta_2)],$$

missä $p_1(\theta_1,\theta_2) = -\frac{1}{2\theta_2}, p_2(\theta_1,\theta_2) = \frac{\theta_1}{\theta_2}, K_1(x) = x^2$ ja $K_2(x) = x$.

(b) Totea, että uskottavuusfunktio on muotoa

$$L(\theta_1,\theta_2;x_1,\ldots,x_n) = c\,v(\theta_1,\theta_2;t_1,t_2),$$

missä $t_1 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ja $t_2 = \sum_{i=1}^n x_i$ ja c on vakio. Tunnuslukupari $(T_1, T_2) = (\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i)$ on siis parametrivektorin (θ_1, θ_2) tyhjentävä tunnusvektori.

7.4. Olkoon X havainto binomijakaumasta $\text{Bin}(n,\theta)$, missä $0 < \theta < 1$. (a) Lausu uskottavuustestisuure D, (b) Waldin testisuure W ja (c) Raon pistemäärä S, kun testataan hypoteesia $H_0 : \theta = 0.5$.

7.5. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta $\text{N}(0,\theta)$, missä $0 < \theta < \infty$. Määritä uskottavuustestisuure $D(\theta_0; X_1, X_2, \ldots, X_n)$, kun oletetaan $H_0 : \theta = \theta_0$.

(a) Olkoon $T = \sum_{i=1}^n X_i^2/\theta_0$. Laske $E(T/n)$.

(b) Laske $E(T/n)$, jos otos onkin jakaumasta $\mathrm{N}(0, 2\,\theta_0)$.

(c) Lausu $D(\theta_0)$ T:n funktiona.

7.6. Eräässä risteyksessä oli sattunut ennen liikennevalojen asennusta keskimäärin 6 onnettoluutta kuukaudessa. Valojen asentamista seuranneena vuonna sattui 53 onnettomuutta. Oletetaan, että onnettomuuksien lukumäärä kuukaudessa noudattaa Poissonin jakaumaa $\mathrm{Poi}(\mu)$. Laadi uskottavuustestisuure hypoteesin $H_0 : \mu = 6$ testaamiseksi.

7.7. Lausu tehtävän 6 tilantessa

(a) Waldin testisuure W ja

(b) Raon pistesuure S.

7.8. Tarkastellaan tehtävän 6 tilannetta. Jos riippumattomat $X_i \sim \mathrm{Poi}(6)$, niin $T = \sum_{i=1}^{12} X_i \sim \mathrm{Poi}(72)$.

(a) Generoi jakaumasta Poi(72) havainto ja laske keskiarvo $\bar{x} = t/12$. Laske testisuureiden D, W ja S arvot.

(b) Toista koe 100 kertaa ja tarkista, montako kertaa tapahtumat $\{D > 3.84\}, \{W > 3.84\}$ ja $\{S > 3.84$ sattuvat. Mitä voit tuloksista päätellä, kun 3.84 on $\chi^2(1)$-jakauman 0.95%:n piste eli $P(\chi^2(1) > 3.84) = 0.05$.