Tilastollinen päättely I
6. harjoitukset, 8. vko 2005
(**Tyhjentävyys**: JU 3. Luku s. 81. Määritelmä JU 3.1.2 s. 82, tekijäkriteeri (faktorointikriteeri) JU 3.2.2 s.86. Tyhjentävyydestä myös englanninkielinen viiden sivun moniste harjoitushyllyssä.)

6.1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos tasajakaumasta $Tas[0, \theta]$, missä θ on tuntematon parametri. Osoita (a) määritelmän (JU 3.1.2 s. 82) nojalla ja (b) tekijäkriteerin (JU 3.2.2 s.86) nojalla, että $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ on parametrin θ tyhjentävä tunnusluku.

6.2. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakaumasta $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

(a) Määritä jokin σ^2:n tyhjentävä tunnusluku T.

(b) Osoita, että σ^2:n SUE $\hat{\sigma}^2$ on T:n funktio. Onko $\hat{\sigma}^2$ tyhjentävä?

(c) Onko $\hat{\sigma}^2$ harhaton?

6.3. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos geometrisesta jakaumasta $Geo(\theta)$, jonka todennäköisyysfunktio on $f(x; \theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, $x = 1, 2$ ja $0 < \theta < 1$ on tuntematon parametri. Osoita, että $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ on parametrin on θ tyhjentävä tunnusluku sekä tekijäkriteerin (JU 3.2.2 s. 86) että määritelmän (JU 3.1.2 s. 82) avulla. (Vihje: T noudattaa negatiivista binomijakaumaa.)

6.4. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakaumasta, jonka todennäköisyysfunktio on $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ ja $0 < \theta$.

(a) Totea, että $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1 X_2 \ldots X_n$ on parametrin on θ tyhjentävä tunnusluku. Totea tämän avulla, että myös $T = \log(U) = \log(X_1 X_2 \ldots X_n)$ on θ:n tyhjentävä tunnusluku.

(b) Osoita, että θ:n SUE $\hat{\theta}$ on T:n funktio.

(c) Päättele, että myös $\hat{\theta}$ on θ:n tyhjentävä tunnusluku.

6.5. Eräällä paikkakunnalla on havaittu viiden viime vuoden aikana 10 suurten palovahinkoa. Oletetaan, että vuoden aikana sattuneiden suurten palovahinkojen lukumäärät Y_i noudattavat toisistaan riippumatta Poissonin jakaumaa $\mathrm{Poi}(\mu)$. Olemme siis havainneet, että $T = Y_1 + Y_2 + Y_1 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = 10$. Laske todennäköisyys, että jokaisena viitenä vuotena on sama määrä $(= 2)$ vahinkoja. (Vihje: Voit soveltaa esimerkkiä E1.4, JU, s. 82).

6.6. Oletetaan yhden selittävän muuttujan regressiomalli, missä selitettävät muuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat toisistaan riippumattomat ja $Y_i \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta x_i, 1)$, missä selittävän muuttujan arvot x_i, $0 \leq i \leq n$ ovat annettuja vakioita. (JU, E1.2, s.89)

(a) Näytä, että uskottavuusfunktio riippuu havainnoista pelkästään tunnuslukujen ($\sum_{i=1}^n y_i$ ja $\sum_{i=1}^n x_i y_i$) kautta. Vektori ($\sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{i=1}^n x_i Y_i$) on siis parametrivektorin (α, β) tyhjentävä tunnusvektori.

(b) Onko SUE $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ tyhjentävä tunnusvektori?

6.7. Tarkastellaan sellaista estimaattoriatoria $\hat{\boldsymbol{\theta}}^T = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, että $E(\hat{\theta}_1) = \theta_1$ ja $E(\hat{\theta}_2) = 0$ sekä

$$\operatorname{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

(a) Osoita, että $T = \hat{\theta}_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} \hat{\theta}_2$ on θ_1:n harhaton estimaattori.

(b) Laske T:n varianssi.

6.8. Olkoon $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ ja $D(\pi; X) = -2 \log \frac{L(\pi;X)}{L(\hat{\pi};X)}$ on uskottavuustestisuure.

(a) Generoi 100 havaintoa jakaumasta $\text{Bin}(10, 0.3)$ ja vertaile suureiden $D(0.3; X)$ ja $D(0.6; X)$ empiirisiä jakaumia (ts. piirrä histogrammit).

(b) Generoi 500 havaintoa jakaumasta $\text{Bin}(10, 0.3)$ ja vertaile suureiden $D(0.3; X)$ ja $D(0.6; X)$ empiirisiä jakaumia