

## Tilastollinen päättely I

5. harjoitukset, 7. vko 2005

- 5.1. Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  otos Bernoullin jakaumasta  $\text{Ber}(\pi)$ , missä  $1/2 \leq \pi \leq 1$ . Määritä parametrin  $\pi$  SUE.
- 5.2. Olkoon  $X_1, X_2, X_3$  otos normaalijakaumasta  $N(\mu, \sigma^2)$ . Mikä on estimaattorin  $\frac{X_1+2X_2+X_3}{4}$  suhteellinen tehokkuus verrattuna estimaattoriin  $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ ? Mitä voit sanoa tästä asiasta Cramérin ja Raon epäyhtälön perusteella? (JU, (71), s.44; Al 8.6.3)
- 5.3. Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  otos normaalijakaumasta  $N(\mu, \sigma^2)$ . Mikä on otosvarianssin  $S^2 = \sum_{n=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n - 1)$  tehokkuus? (JU, (71), s.44; Al 8.6.3)
- 5.4. Olkoon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  otos Poissonin jakaumasta  $\text{Poi}(\lambda)$ . Tiedämme, että  $\hat{\lambda} = \bar{X}$ .
- (a) Laske pistesuureen  $U = u(\lambda; X_1, \dots, X_n)$  varianssi.
  - (b) Mikä on estimaattorin  $\hat{\lambda} = \bar{X}$  varianssin Cramérin ja Raon alaraja? Mikä on estimaattorin  $\hat{\lambda} = \bar{X}$  varianssi?
- (Al 8.3.2)
- 5.5. Olkoon  $X \sim N(0, \theta)$ ,  $0 < \theta < \infty$ .
- (a) Määritä Fisherin informaatio  $I(\theta)$ .
  - (b) Olkoon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  otos jakaumasta  $N(0, \theta)$ . Osoita, että  $\theta$ :n SUE  $\hat{\theta}$  on tehokas estimaattori.
- 5.6. Olkoon  $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ .
- (a) Muodosta uskottavuustestisuure  $D(\pi; X) = -2 \log \frac{L(\pi; X)}{L(\hat{\pi}; X)}$ . (Al 8.1)
  - (b) Generoi 100 havaintoa jakaumasta  $\text{Bin}(n, 0.1)$  ja jakaumasta  $\text{Bin}(n, 0.5)$  ja vertaile suureiden  $D(0.1; X)$  ja  $D(0.5; X)$  empiirisiä jakaumia.
- 5.7. Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat  $X_1, \dots, X_n$  noudattavat normaalijakaumaa  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2/a_i)$   $1 \leq i \leq n$ , missä  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ovat annettuja positiivisia vakioita.
- (a) Laske  $\mu$ :n ja  $\sigma^2$  suurimman uskottavuuden estimaatit.
  - (b) Laske informaatiomatriisin  $I(\mu, \sigma^2)$  alkioit  $i_{11}$  ja  $i_{22}$ .
  - (c) Laske vastaavat odotetut informaatiot  $E(i_{11})$  ja  $E(i_{22})$ .

5.8. Hardyin ja Weinbergin lain mukaan genotyyppien  $AA$ ,  $Aa$  ja  $aa$  suhteelliset osuudet populaatiossa ovat  $\theta^2$ ,  $2\theta(1 - \theta)$  ja  $(1 - \theta)^2$ . Kokeessa, jonka tarkoituksena oli estimoida parametri  $\theta$ , tutkittiin  $n$  satunnaisesti valittua yksilöä ja havaittiin eri tyyppien frekvenssit  $Y_1$ ,  $Y_2$  ja  $Y_3$  ( $Y_1 + Y_2 + Y_3 = n$ ).

- (a) Määritä  $\theta$ :n odotettu informaatio.
- (b) Oletetaan, että on vaikea erottaa tyytit  $Aa$  ja  $aa$  toisistaan. Jos identifioidaan vain tyyppi  $AA$  ja tutkitaan  $3n$  yksilöä, niin mitä on odotettu informaatio.
- (c) Milloin  $b$ -kohdan koe antaa parametrista enemmän informaatiota?