Tilastollinen päättely I
2. harjoitukset, 4. vko 2005
(Maxpisteet 8 tehtävää, 50% 4 tehtävää)

2.1. Tehdään otos $X_1, \ldots, X_n$ Bernoullin jakaumasta Ber(π) eli toistetaan Bernoullin koetta n kertaa (onnistumistodennäköisyys π), missä $0 < \pi < 1$ on tuntematon parametri.

(a) Totea, että $\hat{\pi} = \frac{S_n}{n}$ on π:n harhaton estimaattori, kun $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(b) Kuinka suuri n:n on vähintään oltava, jotta poikkeaman $\{|\hat{\pi} - \pi| \geq 0.05\}$ todennäköisyys on korkeintaan 0.01?

(c) Miten arviosi n:n suuruudesta muuttuu, kun tiedetään, että $0 < \pi \leq 0.1$?

2.2. Erääseen kielikokeeseen osallistuneiden 900 opiskelijan pistemäärien keskiarvo $\bar{x} = 83$ ja varianssi on 36. Mikä on niiden opiskelijoiden lukumäärä, joiden pistemäärä poikkeaa keskiarvosta vähemmän kuin 12. Lukumäärä on tuntematon, mutta määritä lukumäärän alaraja Tšebyševin epäyhtälön avulla.

2.3. (a) Olkoon satunnaismuuttujan Y todennäköisyyfunktio $P(Y = \sigma^2) = 1$. Mikä on Y:n momenttifunktio?

(b) Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta N(μ, σ^2). Osoita, että otosvarianssin S^2 momenttifunktio lähenee funktiota $e^{\sigma^2 t}$, kun $n \to \infty$.

(c) Mitä jakaumaa siis otosvarianssin S^2 jakauma lähestyy, kun $n \to \infty$?

2.4. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakaumasta, jonka kertymäfunktio $F(x)$ on tuntematon. Estimoidaan kertymäfunktion arvo $F(a)$ annetussa pisteessä a. Määritellään satunnaismuuttujat $Y_i,\ 1 \leq i \leq n$ siten, että

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{kun } X_i \leq a \\ 0, & \text{kun } X_i > a. \end{cases}$$

Silloin $P(Y_i = 1) = P(X_i \leq a) = F(a) = \theta_a$ on tuntematon parametri.

(a) Muodosta satunnaismuuttujien $Y_i,\ 1 \leq i \leq n$ avulla parametrin θ_a harhaton estimaattori.

(b) Laske muodostamasi estimaattorin varianssi.

2.5. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos tasajakaumasta Tas$(0, \theta)$, missä θ on tuntematon parametri.

(a) Osoita, että otosmaksimin $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ kertymäfunktio on

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t > \theta; \\ (\frac{t}{\theta})^n, & \text{kun } 0 < t \leq \theta; \\ 0, & \text{kun } t \leq 0. \end{cases}$$

(b) Määritä otosmaksimin tiheysfunktio.

2.6. Tarkastellaan edelleen tehtävän 5 tilannetta.

(a) Laske $E(X_{(n)})$ ja totea, että $X_{(n)}$ ei ole θ:n harhaton estimaattori.

(b) Esitä $X_{(n)}$:n avulla jokin θ:n harhaton estimaattori.

2.7. Olkoon $Z_n = n(\theta - X_{(n)})$. Määritä Z_n:n kertymäfunktio

$$F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leq t), \qquad t \in (0, n\theta)$$

$X_{(n)}$:n kertymäfunktion avulla.

2.8. Tarkastellaan tehtävässä 7 määriteltyä satunnaismuuttujien jonoa $(Z_n; n \geq 1)$. Näytä, että $Z_n \xrightarrow{d} Z$, kun $n \to \infty$, missä $Z \sim \mathrm{Exp}(\theta)$.

2.9. Kokeeseen osallistui 10 miestä ja 20 naista. Oletetaan, että koepistemäärät noudattavat normaalijakaumaa. Olkoon S_1^2 naisten ja S_2^2 miesten otosvarianssi. Laske todennäköisyys $P(S_2^2 < S_1^2)$,

(a) kun miesten ja naisten koepistemäärien jakaumilla on samat varianssit;

(b) kun miesten koepistemäärän jakauman varianssi on kaksi kertaa naisten pistemäärän jakauman varianssi.