

Tilastollinen päättely I

1. harjoitukset, 3. vko 2005

1.1. Olkoon X_1, X_2 otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$.

- (a) Määritä jakauman kertymäfunktio.
- (b) Laske $P(X_{(2)} < \frac{3}{4})$, missä $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$.
- (c) Laske satunnaismuuttujan $Y = X_1 + X_2$ odotusarvo ja varianssi.

1.2. Olkoon X_1, X_2, X_3 otos jakaumasta $\text{Exp}(1)$, jonka tiheysfunktio on siis

$$f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty.$$

- (a) Määritä otoksen yhteisjakauman tiheysfunktio.
- (b) Laske todennäköisyys $P(1 < X_1 < 2, 0 < X_2 < 3, 2 < X_3 < 6)$.
- (c) Laske $E(X_1 X_2 X_3)$.

1.3. Olkoon X_1, X_2, X_3 otos gammajakaumasta $\text{Gamma}(7, 5)$.

- (a) Määritä satunnaismuuttujan $Y = X_1 + X_2 + X_3$ momenttifunktio.
- (b) Mitä jakaumaa Y noudattaa?

1.4. Osoita, että otosvarianssi S^2 on harhaton, eli $E(S^2) = \sigma^2$ kaikilla σ^2 :n arvoilla, missä σ^2 on populaation varianssi (Ks. Esimerkki 6.4).

1.5. Oletetaan, että naulojen paino X noudattaa normaalijakaumaa $N(8.78, 0.16)$.
Olkoon \bar{X} otoskeskiarvo, kun $n = 9$.

- (a) Piirrä X :n ja \bar{X} :n jakaumien tiheysfunktioiden kuvaajat samaan kuvioon.
- (b) Olkoon S^2 otosvarianssi. Määritä vakiot a ja b siten, että $P(a \leq S^2 \leq b) = 0.90$ ja $P(S^2 \leq b) = 0.95$.

1.6. Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n otos tasajakaumasta $\text{Tas}(0, 1)$.

- (a) Määritä minimin $X_{(1)}$ ja maksimin $X_{(n)}$ jakaumien tiheysfunktiot.
- (b) Osoita edellisen kohdan tuloksen perusteella, että $E(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1}$ ja $E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}$.

1.7. Olkoon X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 otos eksponenttijakaumasta $\text{Exp}(3)$.

- (a) Määritä mediaanin $X_{(3)}$ tiheysfunktio.
- (b) Laske todennäköisyys $P(X_{(4)} < 5)$.

(c) Laske $P(X_{(1)} > 1)$.

1.8. Olkoon X_1, X_2, \dots, X_{15} otos χ^2 -jakaumasta vapausastein 1.

(a) Mitä jakaumaa noudattaa $Y = \sum_{n=1}^{15} X_i$?

(b) Määritä vakio a siten, että $P(Y \leq a) = 0.95$.

(c) Laske keskeiseen rajaväittämään perustuva likiarvo todennäköisyydelle $P(Y \leq a)$ ja vertaa arviota tarkkaan arvoon (a määritetty edellisessä kohdassa).

1.9. Piirrä samaan kuvioon tehtävässä 8 määritetyn Y :n jakauman tiheysfunktion ja likiarvon laskemiseen käytetyn normaalijakauman tiheysfunktion kuvaajat.