

Monimuuttujaiset kasvukäyrät

Harjoitus 4.

20.2.2007

1. Tarkastellaan kasvukäyrämallia

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{T}' + \mathbf{E},$$

missä $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)'$, \mathbf{X} on annettu m -asteinen $n \times m$ -matriisi, \mathbf{B} on estimoitava $m \times p$ parametrimatriisi, \mathbf{T} on p -asteinen $q \times p$ -matriisi ja satunnaisvirhematriisin \mathbf{E} rivit ovat $IN(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$. Osoita, että parametrimatriisin \mathbf{B} pienimmän neliösumman estimaattori on

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1}.$$

2. Mikä olisi tehtävän 1 tapauksessa estimaattorin kovarianssimatriisi ja mikä olisi vastaava kovarianssimatriisi, kun oletetaan että satunnaisvirhematriisin \mathbf{E} rivit ovat $IN(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$?
 3. Johda tehtävän 1 tilanteessa parametrin σ^2 harhaton estimaattori REML-menetelmällä.
 4. Estimoi *Dental*-aineistossa (R-kirjastossa *nlme*, aineisto *Orthodont* tai matriisina netissä kurssisivulla nimellä *Dental.txt*) pienimmän neliösumman menetelmällä tytöille ja pojille omat kasvukäyrät, kun malliksi oletetaan suora.
- 5-6. Osoita, että estimaattori

$$\tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{T})^{-1}$$

sievenee muotoon

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{T}(\mathbf{T}'\mathbf{T})^{-1},$$

kun $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}' + \sigma^2\mathbf{I}$, missä \mathbf{D} on pd ja $\sigma^2 > 0$.

{Voit käyttää esimerkiksi seuraavaa tulosta: Jos \mathbf{G} on $d \times g$ ($r(\mathbf{G}) = g \leq d$) ja \mathbf{F} $d \times f$ ($r(\mathbf{F}) = f = d - g$) siten, että $\mathbf{G}'\mathbf{F} = \mathbf{O}$, niin

$$\mathbf{F}(\mathbf{F}'\mathbf{V}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}' = \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{G}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{V}^{-1},$$

missä \mathbf{V} on pd .}